目　录

CONTENTS

第一章 分形几何概论

1.1 维数的基本概念

自然界中出现的诸如云层的边界、山脉的轮廓、雪花、海岸线等“不规则”几何形体，难以用经典几何中的直线、光滑曲线、光滑曲面来描述. 同时，大量不同类型的极不规则的几何对象常常出现在自然科学的不同领域中，如数学中解决非线性问题时出现的吸引子，流体力学中的湍流，物理中临界现象与相变，化学中酶与蛋白质的构造，生物中细胞的生长，工程技术中的信号处理和噪声分析……. 长期以来，一方面人们试图将它们纳入经典几何的框架中研究. 但人们发现，由此导出的模型即使在近似的情形，无论在理论上还是在实验中，均难以处理所接触到的实际情形. 另一方面，人们已注意到不规则集合往往能提供许多自然现象的更好的描述.

80 年代初，由 B. B. Mandelbrot 所创立的分形几何[1,2]，提供了研究这类不规则几何对象的思想、方法和技巧. 特别是近几年来，这一新兴学科在数学、物理、化学、生物、医学、地质、材料、工程技术……诸学科中已得到广泛应用. 同时，不同学科中提出的大量问题又刺激了分形几何的深入发展. 特别应当指出的是分形几何的诞生与发展对整个科学的发展有极为重要的意义，诚如 Shlesinger 所指出：“20 世

纪的后半期似乎是科学与数学变得更加专门化的时期. 令人注目的是，在前一个10年，下述两个课题使上述趋势得以逆转：非线性动力学与分形几何. 前者涉及到运动的非线性确定方程的一般行为，后者则是研究自相似或自仿射对象的几何以及该几何上的动力学. 两者均已应用到一系列深刻的交叉学科的问题中."

本节将对下述问题做简要的描述：什么是分形维数？它们的意义是怎样的？不同的维数差异与联系是怎样的？

1.1.1　Koch 曲线

前面已经提到，分形几何的研究对象是一类不规则的几何形体. 一方面，这类对象不能用经典几何来处理；另一方面，这类几何对象又应有某些"较好"的性质，以便我们能研究它们并适合于应用的目的. 为了能比较清楚地阐述上述意思，我们先考察一个典型的分形现象，即 Koch 曲线，如图 1.1.1 所示.

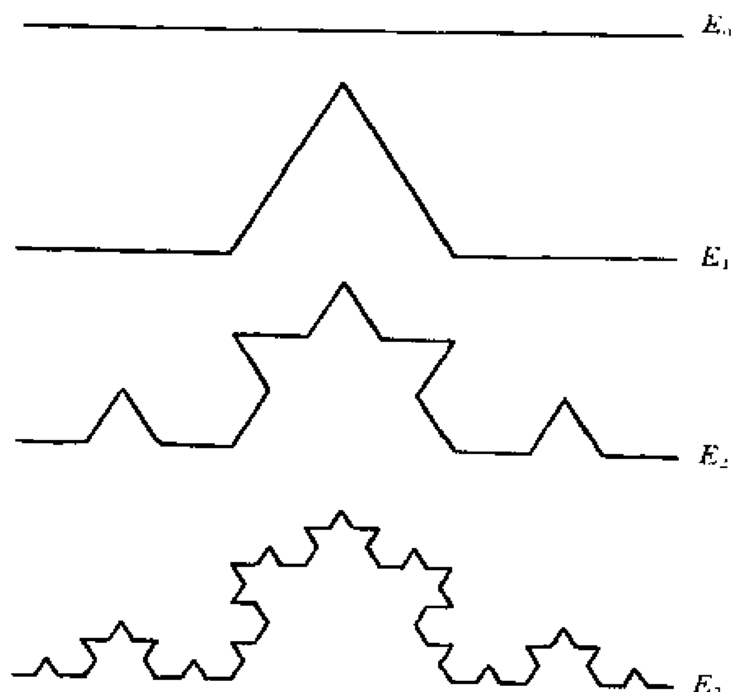


图 1.1.1　Koch 曲线

设 E_0 为单位区间，以 E_0 的中间三分之一线段为底，向上作等边三角

形，然后去掉该底（保留端点）. 由此得到的 4 条线段组成的图形记为 E_1；对 E_1 的每一边重复上述过程，所得到的折线多边形记为 E_2；应用同样的方式，我们从 E_{k-1}得到 E_k. 当 k 趋于无穷时，折线多边形序列 E_k 趋于一极限曲线 E，称为 Koch 曲线.

1.1.2　Koch 曲线的特性及推广

1. Koch 曲线的特性

下面我们分析 Koch 曲线 E 的特性.

(1) 曲线 E 具有"细结构"，亦即它包含对应任意小尺度下的细节，不管取多么小的尺度，60°的尖角仍然出现，只是边长相应减小（注意，用正多边形逼近圆时，相邻边夹角递增趋于 180°）. 这个事实表明，曲线 E 的复杂性不随尺度的减小而消失.

(2) 曲线 E 难以用经典的方法刻画，从整体上看，它既不是满足某些简单几何条件的点的轨迹，亦不能作为任一简单方程的解的集合；从局部上看，它不能通过切线来描述（事实上，曲线 E 上每点均无切线）.

(3) 曲线的"长度"为无穷大，而"面积"为零，因此我们不能用通常的测度来量度它的"大小".

(4) 曲线 E 具有局部与整体的对称，它由 4 个与 E 相似的部分组成，其相似因子为$1/3$；而每部分由 4 个更小的但仍与 E 相似的，其相似因子为$1/3^2$ 的部分组成……. 上述对称性亦称为自相似性.

(5) 尽管 E 具有复杂的细结构，但它的定义非常直接. 特别地，E 可以由简单的递归方式生成，而且，它的逐阶迭代 E_k 给出 E 的越来越好的近似.

我们看到，特性 (1)、(2) 和 (3) 反映了 Koch 曲线的"不规则性"，而特性 (4)、(5) 则给出了 Koch 曲线某些"规则件". 一般说来，我们所讨论的分形集合都具有前述的某些特性或是它们的变形. 因此，我们的研究对象既从本质上有别于经典几何，同时亦排除那些极为不规则的几何形体. 下面进一步分析特性 (3) 与 (5)，并可以看到它们在分形几何研究中所起的作用.

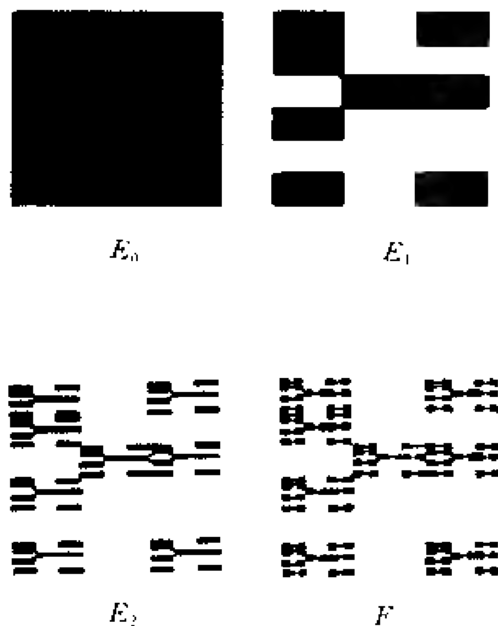
2. Koch 曲线特性的推广

Koch 曲线具有严格意义下的自相似，即局部经过相似放大（沿各个方

向的放大率均相同）后与整体重合．下述各种推广均反映了局部与整体间的某种意义下的对称性．

（1）自仿集．该集合可分解为若干部分，而每一部分通过一个仿射映射（即沿各个方向的放大率不同）与整体重合．图1.1.2是McMullen自仿集的生成方式．

（2）准自相似集．这类集合的任意小的部分经过放大，再经光滑扭曲，可与该集的某一更大部分重合．例如，由$f(z)=z^2+C$对适当的C产生的Julia集（图1.1.3）．



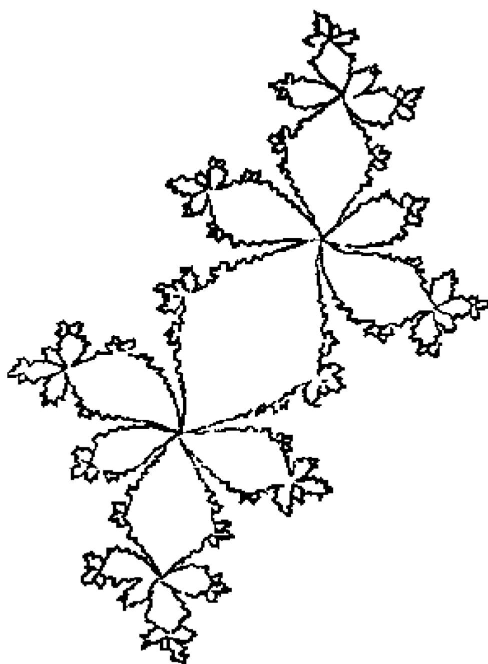


图1.1.2　McMullen自仿集的生成方式　　图1.1.3　Julia集

（3）统计自相似集．在Koch曲线生成的过程中，若每一尖角允许以相同的概率向上或向下生成，那末它的极限曲线仍然存在并具有细结构．从图1.1.4上看，虽然似乎比Koch曲线更“复杂”（实际上它更接近自然界中的海岸线），但该集在下述意义下具有自相似性：它的任意部分的放大与整体具有相同的统计分布律．

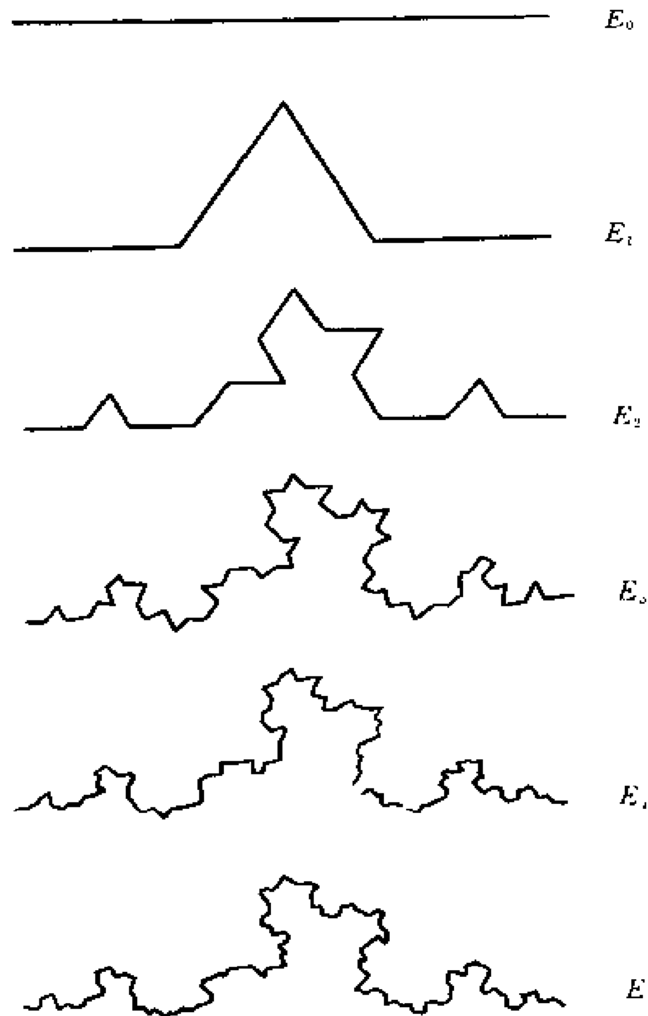


图1.1.4　与海岸线相似的曲线

上述这些是自相似性的推广，目的在于引进局部与整体间的某种对称，以保证所讨论的分形集有一定的正则性．为此，B. B. Mandelbrot 曾建议把分形定义为整体与局部具有某种意义下的对称性的集合（或具有某种意义下的自相似性的集合）．但这一定义明显地过于狭窄．一方面，Cantor 集从理论上看应当归入分形集（Cantor 集定义为全不连通的完备紧集），它们之中许多并不具有自相似性．另一方面，噪声分析中出现的大量信号曲线亦不具有自相似性．特别地，线段、正方形、立方体……，这些图形均为严格自相似，但显然不应归入分形集．

1.1.3　维数

B.B. Mandelbrot 刻画自然界中的分形现象是通过下述三个要素，即：形（form）、机遇（chance）、维数（dimension）．人们可以毫无困难地区别枫叶和柳叶，因为它们的形不一样；人们亦认为 2 片大小不同的枫叶是"一样"的，因为它们有相同的形．前面提到的自相似性提供了将分形从形上进行分类的一个工具．但迄今为止，对分形的形的刻画的研究却极为缓慢．

从图 1.1.1 与图 1.1.4 可以看到，图1.1.4 中的曲线与海岸线非常相似，而图1.1.1 中的曲线与海岸线相比较则过于"规则"，这种差异的产生是由于实际的海岸线受到自然界随机因素的影响，因而显得更为"复杂"，可是更为自然．对于这种复杂性究竟如何刻画与量度，就是维数所应解决的问题．由于分形几何在现阶段的研究中，维数起着极为重要的作用，而且关于维数研究的结果较为丰富和深入，同时，目前在各种维数的使用中存在着一些混淆，因此，本章的下一部分将着重介绍维数的意义、引入的目的、彼此间的联系和区别．对此，我们常常通过对具体例子的分析来加以说明．

1.　Hausdorff 维数

现在回到 Koch 曲线的特性(3)，它指出 Koch 曲线的"长度"为无穷而"面积"为零．注意到我们测量几何图形的长度与面积时，分别用单位长的线段与单位面积的正方形作为尺度的单位，而线段与正方形的欧几里德维数分别为 1 与 2．若用线段为尺度来测量正方形，其结果为无穷，说明所用尺度太"细"；反之，若用正方形为尺度来测量线段，其结果为零，亦即所用的尺度太"粗"．因此，在测量集合时，其测量结果与所采用的尺度有关．特别地，在经典几何中，测量时只容许用整数维的尺度．然而，对于 Koch 曲线，1 维尺度太"细"，而 2 维尺度则太"粗"．因此，我们可以将 Koch 曲线想象为介于 1 维与 2 维间的几何对象，从而应当用非整数维的尺度来进行测量．基于上述思想，Hausdorff 将传统的维数概念按下述方式推广到一般的非负实数．

设 A 为 n 维欧几里德空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个子集，$s \geqslant 0$ 为非负实数．为测量 A，一种方式是：对于 $\delta > 0$，我们用直径不大于 δ 的球来覆盖 A．为使得覆盖中重迭产生的损失最小，应取最经济的覆盖，而相应采用"s 维"尺度．随着 δ 减小，我们所得的测量愈精确，这就是 s 维 Hausdorff 测度的基本思想．它的定义如

下：

定义1.1.1　设 $A \subset \mathbf{R}^n$ 为一子集. 设 $\{U_j\}_{j\geq 1}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的可列个子集，U_j 的直径记为：

$$|U|_j = \sup\{d(x,y): x, y \in U_j\}.$$

如果 $\bigcup_{j\geq 1} U_j \supset A$，且对任意 j，$|U_j| \leq \delta$，则称 $\{U_j\}_{j\geq 1}$ 为 A 的一个 δ- 覆盖. 令：

$$\mathscr{G}_\delta^s(A) = \inf \sum_j |U_j|^s,$$

其中 inf 表示对 A 的所有 δ- 覆盖取下确界，令：

$$\mathscr{G}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathscr{G}_\delta^s(A),$$

则 $\mathscr{G}^s(A)$ 称为 A 的 s 维 Hausdorff 测度. 它是一个度量外测度[3].

进一步可以证明，对任一集 $A \subset \mathbf{R}^n$，存在唯一的非负实数 $D_H(A)$，它满足下述性质：如果 $0 \leq s < D_H(A)$，则 $\mathscr{G}^s(A) = \infty$；如果 $D_H(A) < s$，则 $\mathscr{G}^s(A) = 0$. 值 $D_H(A)$ 称为 A 的 Hausdorff 维数. 结合前面的分析，$D_H(A)$ 是测量 A 的一个合适的尺度，若所用尺度大于它，则过粗，否则就过于细. 因此，$D_H(A)$ 刻画了集合的复杂程度. 从几何的角度看，则表征了集合的填充空间的能力.

注意，Hausdorff 维数：

$$D_H(A) = \sup\{s: \mathscr{G}^s(A) = \infty\} = \inf\{\mathscr{G}^s(A) = 0\}$$

使 $\mathscr{G}^{D_H(A)}(A)$ 可能为一正有限数，在这种情形，称 A 为 s 集. 这类集合有很好的几何性质与分析性质[4]；它亦可取零或无穷，对于这种情形，我们还可考虑使用更细的尺度[3].

Hausdorff 维数具有下述基本性质：

性质1.1.1　单调性. 若 $A \subset B$，则 $D_H(A) \leq D_H(B)$.

性质1.1.2　可列平稳性. $D_H(\bigcup A_i) = \sup D_H(A_i)$.

一个直接推论是可列集的 Hausdorff 维数为零.

性质1.1.3　Lipschitz 不变性. 若 f 为双 Lipschitz 变换，则 $D_H(f(A)) = D_H(A)$.

从而上述等式对平移、旋转及相似变换均成立.

性质1.1.4　若集 A 的 n 维 Lebesgue 测度大于零，则 $D_H(A) = n$，特别

地，$\mathbf{R}^n$ 中的任一开集的维数为 n.

从上面的讨论，我们可以看到 Hausdorff 维数至少有下述意义：

(1) 测量几何对象适当的尺度；

(2) 充斥空间的能力；

(3) Lipschitz 映射的不变量(因此，两个集合的 Hausdorff 维数不等，则它们不能通过一个 Lipschitz 映射作相互变换).

为此目的，也可以用其他方式针对人们所感兴趣的性质或实用方便，引入其他的维数. 易知，对同一集合，不同的维数定义可以给出不同的值，看起来很相似的定义亦可以给出非常不同的性质. 我们将从后面的例子体会这些区别以及它们彼此间的联系. 作为一般的维数，我们希望它们至少具有单调性、有限平稳性、Lipschitz 不变性.

2. Packing 维数

在 Hausdorff 维数定义中，是通过覆盖的方式来测量一个集合. 作为一种"对偶"方式，我们也可以采用填充(Packing)的方式，亦即利用互不相交的球来得到一个集合的近似测量. 具体定义如下：

定义1.1.2 设 $A \subset \mathbf{R}^n, s \geqslant 0, \delta > 0$. 令：

$$\mathcal{P}_\delta^s(A) = \sup\left\{\sum_i |U_i|^s : \{U_i\} \text{为一列中心在 } A \text{ 的互不相交且直径不大于 } \delta \text{ 的球}\right\},$$

$$\mathcal{P}_0^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{P}_\delta^s(A).$$

此时，$\mathcal{P}_0^s(A)$ 不是一个外测度，但可以通过下述方式使其成为外测度，即：

$$\mathcal{P}^s(A) = \inf\left\{\sum_i \mathcal{P}_0^s(A_i) : F \subset \bigcup_i A_i\right\}.$$

$\mathcal{P}^s(A)$ 称为 A 的 s 维 Packing 测度，对应的 Packing 维数 $D_P(A)$定义为：

$$D_P(A) = \sup\{s : \mathcal{P}^s(A) = \infty\} = \inf\{s : \mathcal{P}^s(A) = 0\}.$$

它具有 Hausdorff 维数所具有的性质1.1.1～1.1.4，并且满足：

$$D_H(A) \leqslant D_P(A).$$

特别应指出的是，Hausdorff 测度与 Packing 测度，Hausdorff 维数与 Packing 维数间均具有很多有意义的对偶关系[5,6].

定义1.1.3 若集 A 满足$D_H(A) = D_p(A)$，则集 A 称为正则集[5].

正则集具有下述重要性质：设$A,B\subset\mathbf{R}^n$，若 A 与 B 中有一个为正则集，则：

$$D_H(A\times B)=D_H(A)+D_H(B).$$

亦即，乘积集合的 Hausdorff 维数等于其分量集 Hausdorff 维数的和，上述性质有非常重要的应用.

3. 归纳维数

我们常常遇到的一个非常重要的维数是归纳维数 D_T（亦称为拓扑维数）.

对于人们所处空间的维数，Hermann Weyl 曾有下述形象的解释："我们说空间是 3 维的，因为一座囚室的墙是 2 维的". 如果希望"囚禁"1 个点，可以用一个足够小的立方体"囚室". 立方体的边界由 6 个正方形平面组成，如果我们能知道这些面的维数是 2，就能确定立方体的维数是 3. 于是可以继续想象，一个"生活"在这些扁平的平面上的点可以用一个小圆周来"囚禁"它. 因此，若我们说立方体的面是 2 维的，那么就需要知道一个圆周是 1 维的. 同样的分析，可以想象，生活在圆周上的点可以用 2 个点作的"囚室"来"囚禁"它，即这 2 个点作为"囚室"的墙，从而我们就需要知道一个两点集是 0 维. 最后，生活在两点集上的点已不能自由移动，因此不再需要"囚室"的围墙（而这可以作为 0 维集的合理的定义）.

基于上述思想，集合 S 的拓扑维数$D_T(S)$ 定义如下.

定义1.1.4　若 S 为空集，定义 $D_T(S)=-1$；设 k 为一非负整数，我们称 $D_T(S)\leqslant k$，当且仅当存在 S 的一个开基，该基中任一集 U 满足 $D_T(\partial U)\leqslant k-1$，其中$\partial U$ 表示U 的边界.

度量空间 X 的一个开子集族 $\mathscr{B}$ 称为 X 的一个开基，若对任一开子集 $A\subseteq X$ 与所有 $x\in A$，存在 $U\in\mathscr{B}$，使得 $x\in U\subseteq A$. 而我们定义$D_T(S)=k$，当且仅当 $D_T(S)\leqslant k$ 但$D_T(S)\nleqslant k-1$. 若对任意整数 k，均有 $D_T(S)\leqslant k$，则定义 $D_T(S)=\infty$.

上述方式定义的拓扑维数，最基本的性质是：它是同胚不变量，亦即，若 S 与 R 同胚，则 $D_T(S)=D_T(R)$.

此外，我们知道，Cantor 集的拓扑维数为 0，直线的拓扑维数为 1，平面的拓扑维数为 2，……. 进一步，全不连通的集合、连续曲线、连续曲面

的拓扑维数分别为 0，1 与 2．我们还可以证明：$D_H \geqslant D_T$．

我们可以按拓扑维数将 $\mathbf{R}^n$ 中的集合分类，但这种分类过于粗了．例如平面上两条不同的连续曲线，一条可微，一条处处不可微，可是却有相同的拓扑维数．然而，直觉告诉我们，若一条曲线的 Hausdorff 维数大于它的拓扑维数，那么这条曲线应有一定的复杂性．B. B. Mandelbrot 曾将一个集合 A 定义为分形，如果 $D_H(A) > D_T(A)$．但正如我们在开始时所分析的，上述定义仅强调了几何对象的不规则性，从而其对象过于广泛，很难反映这些对象的共同的特点．为弥补上述缺陷，并考虑到 Hausdorff 维数与 Packing 维数间的对偶性，以及当上述两种维数相同的集合体现出的正则性，Taylor 将集合 A 定义为分形集，如果它能满足 $D_H(A) = D_P(A) > D_T(A)$．当然，这一定义是基于对集合特定性质的兴趣而引入的．此外，上述B. B. Mandelbrot 的定义还有一些缺点：一方面，如前面指出，对象过于广泛；另一方面，我们知道 Weierstrass 函数：

$$\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(2^n x)$$

的 Hausdorff 维数为 1，但它是一个处处不可微的函数，因此，尽管 $D_H = D_T$，它仍应是一个很不规则的几何对象，应当属于分形几何研究的对象．

从前面关于三种维数的分析中，可以很清楚地看到，它们的几何属性以及它们相互间的一些关系．同时可看到，不同的测量方式对应于不同的测量目的，并引出不同的维数．

下面我们再介绍一些常用的维数，并介绍它们之间的关系．读者可以细心体会这些维数在同一个几何对象中所起的作用．

4．Bouligand 维数

这种维数在理论及应用上均有重要意义．它首先由 Bouligand 于 1929 年引入，亦称计盒维数、熵维数、度量维数、对数密度、信息维数、Kolmogorov 熵．不少文献中使用的分形维数（Fractal 维数）常指 Bouligand 维数．读者可以根据上下文加以鉴别．

定义 1.1.5　设 $A \subset \mathbf{R}^n$ 为有界非空子集，令 $N_\delta(A)$ 是半径为 δ 的覆盖 A 的球的最小个数，则 A 的上、下 Bouligand 维数分别定义为：

$$\Delta(A) = \overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta},$$

$$\delta(A)=\varliminf_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(A)}{-\log\delta},$$

如果 $\Delta(A)=\delta(A)$，则称这一公共值为 A 的 Bouligand 维数，并记为 $D_B(A)$. Bouligand 维数除具有前述 Hausdorff 维数的性质1.1.1，1.1.3，1.1.4 以外，还具有下列特性：

(1) 有限平稳性：$D_B(A_1\cup A_2)=\max\{D_B(A_1),D_B(A_2)\}$.

(2) $D_B(A)=D_B(\bar{A})$，$\bar{A}$ 表示 A 的闭包.

特性(2) 指出，可列集的 Bouligand 维数可以不为零. 事实上，对有理数集 Q，我们有 $D_B(Q)=1$.

(3) $D_B\geqslant D_P\geqslant D_H\geqslant D_T$.

注意，在许多情形下，上述维数并不相等. 若 $\Delta(A)\neq\delta(A)$，在对 Bouligand 维数做数值计算的时候，要特别注意这一点.

这一特性亦说明，Bouligand 维数较 Hausdorff 维数更“细”. Bouliband 维数还有下述等价定义：

定义1.1.6　若我们用 $N_\delta^i(A)(i=1,2,3,4)$ 分别记：半径至多为 δ 的可覆盖 A 的集的数目、边长为 δ 的可覆盖 A 的 n 维立方体的最小数目、与 A 相交的 δ- 平行网中的立方体的数目、半径为 δ 互不相交的中心在 A 上的球的最大数目，则 Bouligand 维数为：

$$D_B(A)=\lim_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta^i(A)}{-\log\delta},\qquad i=1,2,3,4.$$

在应用中我们可根据需要，来选择上述不同定义.

Bouligand 维数还可用下述方法引入（可追溯到 Minkowski)，它具有更明显的几何意义：设 $A(\varepsilon)$ 表示与集 A 的距离不超过 δ 的点的集合（该集称为 A 的 Minkowski 平行体)，$|A(\varepsilon)|_n$ 表示它的 n 维 Lebesgue 测度. 若 A 为一个点，则 $|A(\varepsilon)|_n$ 等价于 ε^n，$\varepsilon\to 0$. 若 A 为一线段或为一有限长弧，则 $|A(\varepsilon)|_n$ 等价于 ε^{n-2}，……如此思路引导我们通过乘积 $\varepsilon^{\alpha-n}|A(\varepsilon)|_n$ 的临界指数来定义维数. 可以证明：

$$\begin{aligned}D_B(A)&=\inf\{\alpha:\varepsilon^{\alpha-n}\mid A(\varepsilon)\mid_n\to 0\}\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{n-\left(\frac{\log\mid A(\varepsilon)\mid_n}{\log\varepsilon}\right)\right\}.\end{aligned}$$

上述公式在确定 Bouligand 维数时往往很方便.

下面我们通过一个例子说明 Bouligand 维数与 Hausdorff 维数的差别.

考虑平面上的螺线 $\rho = f(\theta)$, $\theta \geqslant 0$, 当 θ 单调趋于无穷时, ρ 趋于 0. 某些曲线, 如 $\rho = (1+\theta)^{-1}$非常 "迅速" 地趋于零, 而另一些曲线与 $\rho = [\log(2+\theta)]^{-1}$ "缓慢" 地趋于零. 后者有填满零点邻域的趋势, 在这种意义下, 这些慢速曲线类似于局部 2 维的集合.

容易看到, 上述曲线的拓扑维数、Hausdorff 维数以及 Packing 维数均为 1, 从而不能用这些维数来对螺线进行分类. 亦即这些维数太 "粗". 反之, 前面引入的 Bouligand 维数更细些. 事实上, 我们可以证明, 当曲线 Γ 跑遍螺线族时, $D_B(\Gamma)$遍历区间[1,2]; 螺线速度越慢, 其 Bouligand 维数越大. 上述例子表明, 即使满足 $D_P = D_H = D_T$ 的集合, 仍可具有我们所要求的任意程度的复杂性. 因此, 在描述一个集合的复杂性时, 往往依赖于所选择的维数, 在一种维数下为整数时, 在其他的维数下可能为分数. 另一个容易理解的例子是区间[0,1]中的可列集, 在此情形, $D_P = D_H = D_T = 0$, 但 D_B 可取[0,1]中的任意值.

5. Steinhauss 维数

Steinhauss 从另一角度来描述平面有界曲线, 并引入下述 Steinhauss 维数:

我们将(x,y)平面上的直线 D 用法线式表示:

$$x\cos\theta + y\sin\theta - \rho = 0,$$

$0 \leqslant \theta < 2\pi$, $\rho \geqslant 0$, 从而, 平面(θ,ρ)上的 Lebesgue 测度诱导出平面上直线作成的集合上的一个测度 $\mathrm{d}D = \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho$.

定义1.1.7 设 Γ 为平面(x,y)上一条局部可求长的曲线, 令 $\Omega = \Omega(\Gamma)$为与 Γ 相交的直线的集合, Ω_k 为与 Γ 恰好有 k 个交点的直线的集合 $(k \geqslant 1)$, 最后令 $W = m(\Omega)$, $W_k = m(\Omega_k)$, 此处, m 表示前述直线集合上的测度, 曲线 Γ 的 Steinhauss 维数定义为:

$$D_S(\Gamma) = \inf\left\{\alpha \geqslant 1 : \sum_{k\geqslant 1} kW_k^{\alpha} < \infty\right\}$$

$$= \sup\left\{\alpha \geqslant 1 : \sum_{k\geqslant 1} kW_k^{\alpha} = \infty\right\}.$$

进一步, 我们可以验证[7], 若 $L(\Gamma)$表示曲线 Γ 的长, 则:

$$L(\Gamma) = \frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 1} k\, W_k.$$

从而，对于一条不可求长曲线，Steinhauss 维数越大，则与 Γ 相交的直线（它们的交点的数目很大）的集合亦越大.

在很多情形下，Steinhauss 维数比 Bouligand 维数更细，而对于相当大一类螺线，上述两维数相同.

6. Menders-France 维数

对于平面无界曲线，由于一般有 $W_\infty>0$，因此不能定义 Steinhauss 维数. 但是，我们仅对有界集定义 Bouligand 维数，因此还必须引入另外的维数. 下面是 Menders-France 维数的定义.

定义1.1.8 令 Γ 为从原点出发的局部可求长的无界曲线，Γ_t 为从原点出发的局部可求长的曲线. 以 K_t 表示 Γ_t 的凸闭包，$\partial(K_t)$为 K_t 的边界，Γ_t^ε 为 Γ_t 的 ε - Minkowski 平行体，则 Γ 的上、下 Mendes - France 维数定义为：

$$\overline{D}_M(\Gamma)=\lim_{\varepsilon\to0}\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\log|\partial K_t|}{\log\Gamma_t^\varepsilon},$$

$$\underline{D}_M(\Gamma)=\lim_{\varepsilon\to0}\underline{\lim_{\delta\to0}}\frac{\log|\partial K_t|}{\log\Gamma_t^\varepsilon},$$

其中$|\partial K_t|$表示$\partial(K_t)$的长度.

上述维数可取遍[1,2]中的任意值，它的几何意义是明显的.

注意，前述平面曲线的维数经常出现在物理问题（如生长、渗流）及几何测度与数论问题中. 此外，对于不同的几何对象可采用不同的测量方式，而引入不同的维数. 另一方面，即使是同一几何对象，亦可以引入不同的维数用以刻画它的不同的几何性质. 特别地，当不同的维数取相同的值时，它往往体现出一些正则的性质，而所取值不同时，这些性质表现出一定程度的偏差.

为了进一步说明引入维数方式和维数的作用，下面我们再讨论几种维数，这些维数在实际问题中亦常常遇到.

7. Besicovitch　Taylor 维数

把 Besicovitch - Taylor 维数记为 D_{BT}[6]. 该维数或它的等价形式经常出现在物理、生物与化学等问题中.

我们先考虑 1 维的情形.

定义1.1.9　设 S 为区间 $[0,1]$ 的闭子集，那么 $[a,b]\setminus S$ 为开集，它可表示为可列多个不相交开区间 $\{I_n\}_{n\geqslant 1}$ 的并集，也恰好是 $[a,b]\setminus S$ 的一个填充. 我们希望通过 $\{I_n\}_{n\geqslant 1}$ 来描述 S. 假定 I_n 按长度递减排列，并设 I_n 的长度 $|I_n| = u_n$，则 S 的 Besicovitch-Taylor 维数定义为：

$$D_{BT}(S) = \inf\left\{\alpha : \sum_{n\geqslant 1} u_n^{\alpha} < \infty\right\}, \tag{1.1.1}$$

从而 D_{BT} 反映了 S 的余集的填充速度. 它有下述等价定义：

定义1.1.10　D_{BT} 可定义为：

$$\begin{aligned} D_{BT}(S) &= \limsup_n \frac{\log n}{\log u_n^{1}} \\ &= \limsup_n \left[1 - \left(\log \sum_i^{\infty} u_i\right)\log u_n^{1}\right] \\ &= \limsup_n \log n \left(\log n - \log \sum_i^{\infty} u_i^{-1}\right). \end{aligned}$$

特别地，若 S 的 Lebesgue 测度为零，则 $D_{BT} = D_B$.

注意，下面将看到，我们的兴趣在 S 有非空内点的情形.

类似于 1 维的情形，可以考虑高维的推广. 现以 2 维为例. 此时，S 的余集应由 2 维图形来代替，长度用直径来代替. 这些图形的选择不唯一，但应具有一定的正则性. 例如，我们可以取由距离为 2^{-n} 的平行线（包括坐标轴）构成的 2^n 格，即边长为 2^{-n} 的正方形族，这样的正方形称为网格. 作为初始区域，首先取出 U_0 为包含 S 的最小的网格；然后 U_1 为 $U_0 - S$ 中的最大的网格；再取 U_2 为 $U_0 - S - U_1$ 中最大的网格……. 若以 $\{U_n\}_{n\geqslant 0}$ 表示相应的网格的直径，则可用（1.1.1）式来定义 D_{BT}.

前面已指出，当 S 的 Lebesgue 测度为零时，$D_{BT} = D_B$. 但在实际问题中，常需要考虑内点非空但仍然非常复杂的集合，例如人体血管系统，它不断分叉，直径与长度均相应减小.

D_{BT} 的另一等价定义适合于刻画这类集合的复杂性：

定义1.1.11　D_{BT} 可定义为：

$$D_{BT}(S) = d - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log |\bar{S}^{\varepsilon}|_d}{\log \varepsilon}, \tag{1.1.2}$$

其中 d 为空间维数，$|\,|_d$ 为 d 维 Lebesgue 测度，S^{ε} 为 S 的 ε − Minkowski 平

行体，$\tilde{S}^{\epsilon}=S^{\epsilon}\setminus S$.

直接由(1.1.2)式定义的维数常常称为 S 的外容量维数.

若 S 的 Lebesgue 测度大于零，但 S 为无处稠密（即每一球包含余集中的点），那么，$S=\partial S$，且 $D_{BT}(S)=d$ $(=D_B=D_T)$，这样的集合通常称为厚分形

在实用中，例如在多孔材料的研究中，常考虑相对于一个给定的集合 U 的 S 的维数，它定义为：

$$D_{BT}(S,U)=d \quad \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\log|\bar{S}^{\epsilon}\cap U|_d}{\log\epsilon},$$

并等价于计算包含在 U 中的 S 的余集所相应的 D_{BT} 值．这一维数依赖于 S 与 U，并可取 0 与 d 中任意值.

当 S 有内点，特别地，当 S 为一有界开集的闭包，此时 $S\neq\partial S$，并且 $D_{BT}(S)\leqslant D_B(\partial S)$．如果 ∂S 为一光滑曲线，等号成立．对于一般的情形，我们可以举出例子，使对于任意 $1\leqslant s<t\leqslant 2$，有：

$$D_{BT}(S)=s,\qquad D_B(\partial S)=t.$$

8．相似维数

相似维数记为 D_s，并定义如下.

定义1.1.12　称 S_1，…，S_k：$\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^d$ 为一族压缩相似映射，若存在 c_i，$0<c_i<1$，$i=1$，…，k，使得对任意$(x,y)\in\mathbf{R}^d$，有：

$$|S_i(x)-S_i(y)|=c_i|x-y|.$$

在上述条件下，可以证明，存在唯一的紧集 $F\subset\mathbf{R}^d$，使得：

$$F=\bigcup_{i=1}^{k}S_i(F),$$

集合 F 称为（严格）自相似集．容易证明，存在唯一的正实数 s，使得：

$$\sum_{i=1}^{k}c_i^s=1.$$

数 s 称为F 的相似维数．特别地，若 $c_1=\cdots=c_k=r$，则：

$$s=\frac{\log k}{\log\frac{1}{r}}.$$

它有下述明显的几何意义：自相似集由 k 个与它相似的图形组成．它们的

相似比为 r（如雪花曲线、Cantor 集）等.

如果 S_i $(i=1, \cdots, k)$ 满足开集条件，亦即存在开集 $V \subset \mathbf{R}^d$，使得 $S_i(V) \subset V$，且 $S_i(V) \cap S_j(V) = \varnothing$，$i \neq j$，那么有：

$$D_s(F) = D_B(F) = D_H(F).$$

9. Fourier 维数[8]

设 μ 为 $\mathbf{R}^d$ 上的正有限测度，则 μ 的 Fourier 变换定义为：

$$\hat{\mu}(u) = \int_{\mathbf{R}^d} \exp(ixu) \mathrm{d}\mu(x), \qquad x \in \mathbf{R}^d.$$

定义1.1.13 令 E 为 $\mathbf{R}^d$ 的紧集，它的 Lebesgue 测度为零，那么，E 的 Fourier 维数定义为：

$$D_F(E) = \sup\{\alpha : u \to \infty, \mu \neq 0, \mu \text{ 的支集为 } E,$$
$$\text{且 } \hat{\mu}(u) = o(|u|^{-\frac{\alpha}{2}})\}.$$

我们知道，$D_F(E) \leqslant D_H(E)$. 若 E 为 Cantor 三分集，则 $D_F(E) < D_H(E)$. 人们注意到，若将 $\mathbf{R}^d$ 中的集嵌入到 $\mathbf{R}^{d+1}$，它的 Hausdorff 维数不改变，但它的 Fourier 维数将为零. 因此，一般说来，这两个维数不相等（两者相等的集称为 Salem 集，它是调和分析中很重要的一类稀薄集）.

从定义可以看到，集合的 Fourier 维数是通过该集所支撑的正测度的 Fourier 变换的渐近性态来刻画的复杂性.

10. 容量维数

容量维数记为 D_C[8]. 设 E 为 $\mathbf{R}^d$ 中紧集，μ 为以 E 为支集的正有限测度，如果有：

$$I_\alpha(\mu) = \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} \frac{\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(x')}{|x - x'|^\alpha} < \infty, \qquad 0 < \alpha < d,$$

则我们称 μ 对于 $|x|^{-\alpha}$ 有有限能量. 如果 E 能支撑一个对于 $|x|^{-\alpha}$ 有有限能量的非零正测度，则我们称 E 有正容量，并记为 $\mathrm{Cap}_\alpha E > 0$.

定义 1.1.14 E 的容量维数 $D_C(E)$ 定义为：

$$D_C(E) = \sup\{\alpha : \mathrm{Cap}_\alpha E > 0\}$$
$$= \inf\{\alpha : \mathrm{Cap}_\alpha E = 0\}.$$

事实上，容量维数 $D_C(E)$ 是 Hausdorff 维数的另一个等价定义，亦即 $D_H(E) = D_C(E)$.

由于容量的研究涉及到势论技巧，特别是容量维数的估计可以转化为积分的收敛性问题，因此在维数的估计中，它占有重要的地位.

11.　测度维数

定义1.1.15　设 μ 为 $\mathbf{R}^d$ 上的概率测度，则 μ 的 Hausdorff 维数 $D_H\mu$ 定义为：

$$D_H\mu = \inf\{D_H(E):\mu(E) = 1\}.$$

若 μ 的支集为集 F，则显然有 $D_H\mu \leqslant D_H(E)$. 另一方面，有例子表明上述不等式中的不等号可严格成立.

测度的 Bouligand 维数、Packing 维数可通过类似的方式定义.

在动力系统以及吸引子理论中，由于常常通过自然的方式伴随一个不变测度，因此常常通过测度的维数的研究来讨论相应的吸引子.

注意，从测度的 Hausdorff 维数的定义中可以看到，$D_H\mu$ 为可以支撑 μ 的最小集合的 Hausdorff 维数.

此外，$D_H\mu$ 常常与熵、Liapunov 指数系密切联系.

1.2　分形几何中的若干重要问题

自 80 年代后期以来，分形几何及其相关领域取得了非常丰富的成果，限于篇幅，我们在此只介绍其中的一部分. 关于重分形测度分析以及测度的分形理论，将在第二章中详细讨论.

1.2.1　自仿集的维数估计

1981 年，Huchinson 按下述方式引入自相似集：

定义1.2.1　设 D 为 $\mathbf{R}^n$ 中闭子集. 映射 S：$D\to D$ 称为 D 上的压缩映射，若存在 $c\in\mathbf{R}$，$0<c<1$，使得 $|S(x)-S(y)|\leqslant c|x-y|$，$x, y\in D$；当上述式子中等号成立，即 $|S(x)-S(y)| = c|x-y|$，则 S 称为相似映射.

从定义可以看到，相似映射沿各个方向的压缩率相同.

设 $\Phi=\{\varphi_1, \cdots, \varphi_m\}$ 为一有限压缩族，即对于任意 j，$1\leqslant j\leqslant m$，

$$|\varphi_j(x)-\varphi_j(y)|\leqslant c_j|x-y|,\qquad x, y\in D, 0<c_j<1.$$

Huchiuson 证明存在唯一非空紧集 F，使得：

$$F = \bigcup_{j=1}^{m} \varphi_j F, \tag{1.2.1}$$

集 F 称为压缩族 Φ 的不变集，它往往是分形集. 特别地，如果所有的 φ_j 均为相似压缩，则 F 称为自相似集. 自相似集是目前研究得较为深入的一类分形集. 为叙述关于自相似集的主要结果，先引入"开集条件"：

若存在非空有界开集 V，使得：

(1) $V \supset \bigcup_{j=1}^{m} \varphi_j V$,

(2) $\varphi_i V \bigcap \varphi_j V = \varnothing, i \neq j$,

则称压缩族 Φ 满足开集条件.

定理1.2.1 设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ 为一族满足开集条件的、压缩系数为 c_j 的相似映射，则：

(i) $\dim_H F = \dim_P F = \dim_B F = s$，其中 s 由下式确定：

$$\sum_{j=1}^{m} c_j^s = 1, \tag{1.2.2}$$

今后，以下记号将同时使用：$\dim_H = D_H$，$\dim_P = D_P$，$\dim_B = D_B$.

(ii) F 为 s 集，即 $0 < H^s(F) < \infty$.

自相似集许多深入的性质均基于上述定理. 另外，自相似集有许多类型的推广，但均要求各个方向有相同的压缩比这一条件，一个自然的推广是沿不同方向有不同压缩压比的线性映射，由此产生的由(1.2.1)式定义的不变集称为自仿集.

仿射变换记为 $\varphi = T + b$，其中 T 为 $\mathbf{R}^n$ 上的线性映射，b 为 $\mathbf{R}^n$ 中的向量.

B.B.McMullen 于 1984 年考虑了下列类型的自仿集：

设 E_0 为单位正方形，p，q 为正整数，$p < q$. 现将 E_0 分为 $p \times q$ 个边长为 $1/p$ 与 $1/q$ 的相同的长方形. 在这些长方形中选择若干个，构成 E_1. 设 N_j 为以这种方式从第 j 列中选出的长方形的个数，$1 \leqslant j \leqslant p$. 从 E_1 出发，重复上述构造，得到 E_2，等等. 假设按这种方式所得到的极限集为 E，则 E 为自仿集（读者可用类似于自相似集的语言来定义上述 McMullen 的构造）.

定理1.2.2　对于用上述方式构造的集合 E，我们有：

$$\dim_H E = \frac{\log\left(\sum_{j=1}^{p} N_j^{\frac{\log p}{\log q}}\right)}{\log p},$$

$$\dim_B E = \frac{\log p_1}{\log p} + \frac{\log\left(\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} N_j\right)}{\log q},$$

其中 p_1 为至少包含 E_1 中一个长方形的列的数目.

从定理1.2.2 可以看到，对于 McMullen 自仿集，一般说来，$\dim_B E \neq \dim_H E$. 此外可以证明，若 $\dim_B E = \dim_H E$，则 E 是 s 集. 因此，即使对于生成结构非常简单的自仿集而言，它的结构远比自相似集复杂. 另一方面，Falconer 在 1988 年证明了下述结果：

定理1.2.3　设 $\varphi_j = T_j + b_j$ 为一族仿射压缩映射，$1 \leqslant j \leqslant m$，$F$ 为对应于该仿射族的自仿集，则对几乎所有的 $(b_1, \cdots, b_m) \in \mathbf{R}^{nm}$（在 nm 维 Lebesgue 测度意义下），有：

$$\dim_H F = \dim_B F.$$

我们注意到，$\mathbf{R}^n$ 对于 nm 维 Lebesgue 测度，其测度为零，因此不适用于 $\mathbf{R}^n$ 的集合的讨论.

Lalley 与 Gazouuras 于 1992 年推广了McMullen 的结果，他们的构造如下.

设：

$$A_{ij}(x) = \begin{bmatrix} a_{ij} & 0 \\ 0 & b_i \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} c_{ij} \\ d_i \end{bmatrix}$$

为一族仿射压缩映射，其中：

$$(i,j) \in J, \quad J = \{(i,j): 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n_i\}.$$

$$0 < a_{ij} < b_i < 1, \quad \sum_{i=1}^{m} b_i \leqslant 1,$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} \leqslant 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant m;$$

$$0 \leqslant d_1 < d_2 < \cdots < d_m < 1, \quad d_{i+1} - d_i \geqslant b_i,$$

$$1 - d_m \geqslant b_m, \quad 0 \leqslant c_{i1} < c_{i2} < \cdots < c_{in_i} < 1,$$

$$c_{i(j+1)} - c_{ij} \geqslant a_{ij}, \quad 1 - c_{in_i} \geqslant a_{in_i}.$$

这一映射族如图1.2.1 所示：

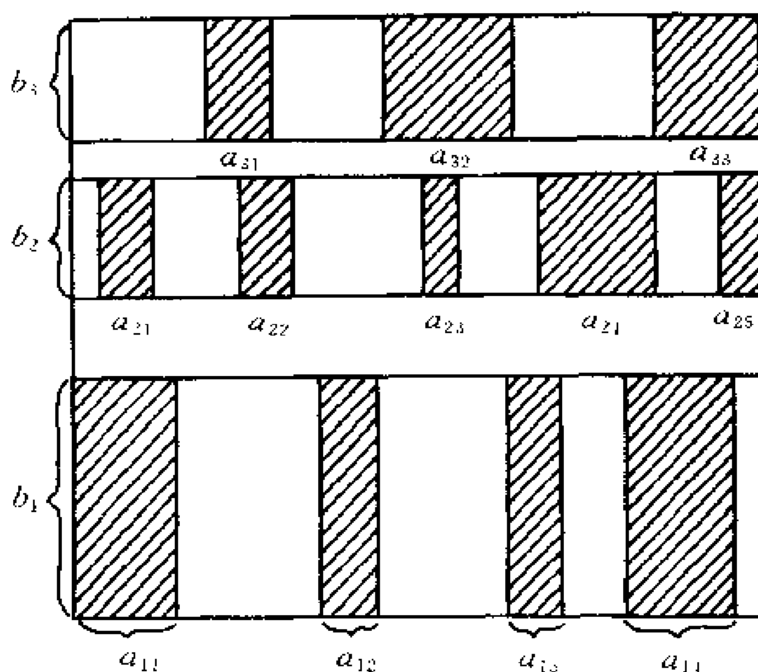


图1.2.1　仿射压缩映射族

定理1.2.4　设 F 为上述仿射压缩映射族的自仿集，我们有如下结论：

(i) 若 $p \in \mathbf{R}$,满足 $\sum_{i=1}^{m} b_i^p = 1$,则：

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} b_i^p a_{ij}^{\dim_H F - p} = 1;$$

(ii) F 的 Hausdorff 维数为：

$$\dim_H F = \max\left\{\frac{\sum_i\sum_j p_{ij}\log p_{ij}}{\sum_i\sum_j p_{ij}\log a_{ij}} + \sum_i q_i\log q_i\left(\frac{1}{\sum_i p_i\log b_i} - \frac{1}{\sum_i\sum_j p_{ij}\log a_{ij}}\right)\right\},$$

上式的极大值是对集 J 上的所有满足 $q_i = \sum_j p_{ij}$ 的概率分布 $\{p_{ij}\}$ 而取的；

(iii) 下列几个式子等价：

(a) $\dim_B F = \dim_H F$;

(b) $0 < H^{\dim_H F}(F) < \infty$,

(c) $\sum_j a_{ij}{}^{\dim_H F \ p} = 1, 1 \leqslant i \leqslant m$.

尽管 Lallen 等人的结果在很大程度上推广了 McMullen 的结果,但与一般的仿射压缩映射相比较,仍有很大限制. 另外,维数的表达并非显式给出. 定理 1.2.4 的证明涉及到动力系统中的一些技巧与精细的统计,但证明冗长,我们从略.

1.2.2　2 阶密度

对于 $\mathbf{R}^n$ 中的光滑几何对象,我们可以通过该几何对象上的点的微分来刻画该点的局部性质. 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的分形集,无法使用该工具. 为了刻画一点附近的局部性态,一个自然的想法是通过支撑该集的正有限测度来进行分析. 经典的 Lebesgue 定理告诉我们,对于一个 Lebesgue 可测集,密度几乎处处存在并等于 1. 由于在整数维的情形,Lebesgue 测度与 Hausdorff 测度等价,因此对于一个 s 集,人们自然希望考虑它的 s 维 Hausdorff 测度作为该集的支撑测度来研究.

先回忆一些有关密度的概念.

定义 1.2.2　设 $E \subset \mathbf{R}^n$ 为一个 s 集, $0 \leqslant s \leqslant n$. 令 $B_r(x)$ 为以 $x(\in E)$ 为中心、r 为半径的闭球,在点 x 的上、下(球面)密度分别定义为:

$$\overline{D}^s(E, x) = \overline{\lim_{r \to 0}} \frac{H^s(E \cap B_r(x))}{(2r)^s}$$

与

$$\underline{D}^s(E, x) = \underline{\lim_{r \to 0}} \frac{H^s(E \cap B_r(n))}{(2r)^s}.$$

如果 $\overline{D}^s(E, x) = \underline{D}^s(E, x)$,则称在 x 点的密度存在,并且记其公共值为 $D^s(E, x)$,称此公共值为 x 点的密度.

密度的性质在分形几何的研究中起着非常重要的作用,是目前最有用的工具之一[4].

当 s 为非整数时,密度一般不存在,因此我们希望知道 $H^s(E \cap B_r(n))/(2r)^s$ 在上、下极限间如何振动,它们的平均性态如何. 为回答上述问题,类似

于 Cesaro 求和，可以按下列方式引入在点 x 的 2 阶上、下密度：

$$\overline{D_2^s}(E,x) = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{H^s(B(x,e^{-t}))}{2^d e^{-ts}}\mathrm{d}t,$$

$$\underline{D_2^s}(E,x) = \underline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{H^s(B(x,e^{-t}))}{2^d e^{-ts}}\mathrm{d}t,$$

若上、下密度相等，则称在点 x 的 2 阶密度存在(其值为上述公共值).

确定一个分形集的 2 阶密度是否存在是一个困难的问题，T. Bedford，M. Fisher 及 K. J. Falconer 等人利用动力系统的 Bowen 理论、概率论以及小波变换等技巧确定了下列几类典型的分形集的 2 阶密度.

1.　双曲 Cantor 集

设 $J \supset [0,1]$ 为$[0,1]$的一个小邻域，$\varphi_0,\varphi_1: J \to J$ 为满足下述条件的两个映射：

(1) $\varphi_0(0) = 0, \varphi_1(1) = 1, \varphi_0(J) \cap \varphi_1(J) = \varnothing$;

(2) φ_0,φ_1 在它们的像集上为 C^{1+r} 阶微分同胚(即它们的微分满足 r 阶 Hölder 条件)；

(3) 存在正数 $\alpha,\beta, 0 < \alpha < \beta < 1$，使得对所有的 $x \in J$，有：

$$\alpha < |D_{\varphi_i}(x)| < \beta, \qquad i = 0,1.$$

注意，条件(1) 蕴含 φ_0,φ_1 保方向，从而 $D\varphi_0 > 0, D\varphi_1 > 0$.

类似于自相似集的讨论，映射 φ_0,φ_1 唯一确定一非空紧集 $C = C(\varphi_0,\varphi_1)$ 满足：

$$C = \varphi_0(C) \bigcup \varphi_1(C).$$

集 C 称为双曲 Cantor 集(因条件为一双曲性条件). T. Bedford 与 M. Fisher 证明了 C 为s 集，并且对于 H^s，对几乎所有的 $x \in C$，2 阶密度存在且等于常数.

2.　1 维 Brown 运动

另一个典型的例子是 1 维 Brown 运动 $W(t)$(关于 Brown 运动的定义，可查阅有关书籍). 设：

$$C_W = \{t \geqslant 0 : W(t) = 0\}$$

为 $W(t)$ 的零点集合，那么 C_W 对于 Wiener 测度几乎必然同胚于 Cantor 三分集，且其 Hausdorff 维数为1/2 . 然而，C_W 的1/2 维 Hausdorff 测度为零，即 C_W 不是1/2 集. 为此，在 Hausdorff 测度的定义中，将 $t^{1/2}$ 用$[2t\log\log(1/t)]^{1/2}$

代替，由此亦可得到Hausdorff型的测度，该测度对于C_W而言，是正有限的，从而我们仍可对此测度引入上、下密度的概念. T. Bedford运用了标度流、局部时的技巧，证明了二阶密度的几乎必然存在性，并确定了二阶密度的值.

此外，还引入了二阶密度的各种类型的推广与变形. K. J. Falconer利用小波变换技巧证明了混合排斥集的2阶密度的存在性.

目前，我们知道的2阶密度存在的分形集类并不多，利用2阶密度来刻画分形集的研究亦有待深入.

1.2.3　分形曲线

1.　Weierstrass 函数的图像的维数

分形曲线是目前分形几何的研究热点之一. 研究的结果亦相当丰富. 分形曲线的研究可以追溯到1872年由Weierstrass引入的、著名的无处可微连续函数：

$$W_{a,b}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \qquad 0 < a < 1, \qquad (1.2.3)$$

他曾证明，若b是奇整数，$ab > 1 + 3/2\pi$，则对任意$x \in [0,1]$，$W_{a,b}$在该点没有有限导数或无限导数. G. H. Hardy于1916年证明，只要$ab \geqslant 1$，则a，b在任一点没有有限导数.

事实上，现在已知道，无处可微的连续函数是普遍存在的. 在Baire纲类的意义下，几乎所有的连续函数是无处可微的.

关于函数(1.2.3)的性质的研究，一个世纪来已有许多结果. 近年来，则集中在对函数(1.2.3)的函数图像的维数的研究上.

B. B. Mandelbrot曾将函数(1.2.3)略作修改而考虑下列形式：

$$D(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n [1 - \cos(b^n \pi x)],$$

上述函数的一个性质是：$D(x) = aD(bx)$，从而反映出某种随尺度变化的自相似性质.

G. H. Hardy证明：$W_{a,b}(x)$在$ab > 1$的条件下，任一点的局部Lipschitz阶为：

$$\alpha = \frac{\log \frac{1}{a}}{\log b}.$$

因此,若以 $\Gamma(W)$ 表示 $W_{a,b}$ 的图像,那么:

$$\overline{\dim}_B \Gamma(W) \leqslant 2 + \frac{\log a}{\log b}.$$

事实上,J.L.Kaplan 等人于 1984 年证明:

$$\dim_B \Gamma(W) = 2 + \frac{\log a}{\log b},$$

而且他们的证明隐含了上述值也等于 $W_{a,b}$ 的图像的 Packing 维数 $\dim_P \Gamma(W)$;F.Rezakhaalou 于 1988 年将上述结果推广到更为一般的情形.

关于 $\Gamma(W)$ 的 Hausdorff 维数的确定则更为困难.下面的猜想是具有挑战性的,至今尚未解决.猜想:

$$\dim_H \Gamma(W) = 2 + \frac{\log a}{\log b}. \tag{1.2.4}$$

Mauldin 与 Williams 于 1986 年得到 $\dim_H \Gamma(W)$ 的一个下界估计,他们证明了对足够大的 b,存在常数 c,使得:

$$\dim_H \Gamma(W) \geqslant 2 + \frac{\log a - c}{\log b}.$$

2. 缺项三角级数的维数

孙道椿与文志英于 1990 年考虑了下列形式的缺项三角级数[9]:

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 1} a_n \cos(\lambda_n x), \qquad r_i = |a_i|,$$

他们证明了下述结果.

定理1.2.5 设 $f(x)$ 满足下述条件:

(i) 存在正函数 $g(n): N \to \mathbf{R}^+$,满足 $g(n) \to \infty$,且 $\forall n \geqslant 1$,有:

$$r_n \lambda_n g(n) \leqslant r_{n+1} \lambda_{n+1};$$

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\log r_n \lambda_n}{\log r_{n+1} \lambda_{n+1}} = 1$;

(iii) 存在非减函数 $h(n): \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$,使得:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{h(n)}{\log\left(g\left(\frac{n}{2}\right)\right)} = 0,$$

且对足够大的 n,成立 $r_{[h(n)]} \leqslant \lambda_n^{-1}$.

在上述条件下,有:

$$\dim_H \Gamma(f) = 2 + \liminf_{n\to\infty} \frac{\log r}{n \log\lambda_n}.$$

上述结果的一个推论如下．设：

$$F(x) = \sum_{n\geq 1} \lambda_n^{s-2}\cos(\lambda_n x), \qquad 1 < s < 2.$$

假定$\{\lambda_n\}$满足：

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \to \infty, \qquad \frac{\log\lambda_{n+1}}{\log\lambda_n} \to 1,$$

则有：

$$\dim_H I(F) = s.$$

这一推论及R.D.Mauldin的结果均支持猜想(1.2.3)式．对于Bouligand维数及Packing维数，在较弱的条件下，孙道椿与文志英于1993年证明了[10]：

$$\overline{\dim}_B \Gamma(f) = \dim_P \Gamma(f) = 2 + \liminf_{n\to\infty} \frac{\log r_n}{\log\lambda_n},$$

$$\underline{\dim}_B \Gamma(f) = 2 + \liminf_{n\to\infty} \frac{\log r_n}{\log\lambda_n}.$$

3．Rademacher 级数

另一类与$W(x)$体现出不同性质的分形曲线为下列形式的Rademacher级数：

$$R(x) = \sum_{n\geq 1} 2^{-\alpha n} R_n(x), \qquad x \in [0,1],$$

其中$R_1(x) = \mathrm{sgn}(\sin 2\pi x)$，$R_i(x) = R_1(2^{i-1}x)$，$i = 1,2,\cdots$为Rademacher函数序列．F.Przytycki与M.Urbanski于1989年通过动力系统技巧，证明了：若2^α为Pisot数(即2^α为大于1的代数数，而2^α的代数共轭的模均小于1)，那么：

$$\dim_H \Gamma(R) < 2 - \alpha.$$

这里，α相当于猜想(1.2.3)式中的$-\log a / \log b$．另一方面，K.S.Hu与K.S.Lau于1990年证明[11]：若R的分布函数F为绝对连续，且$F' \in L^p$，$p > 1$(注意，这些条件均不好验证，但对$\alpha = 1/k$，$k = 1,2,\cdots$时，容易验证条件成立)，则：

$$\dim_H \Gamma(R) = 2 - \alpha.$$

4. 锯齿形函数

一类熟知的 Weierstrass 函数的变形为下列锯齿形函数：

$$g(x) = \sum_{n\geq 0} 2^{-n\alpha}\varphi(2^n t), \qquad 0 < \alpha < 1,$$

其中 φ 为周期的锯齿函数，图 1.2.2 为一种典型的锯齿形函数.

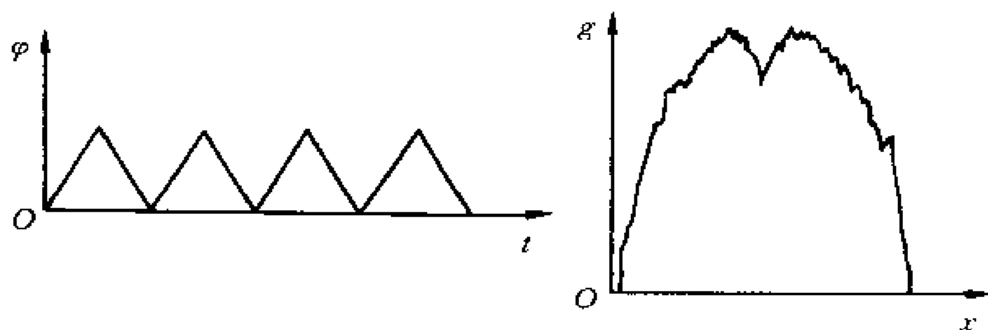


图 1. 2. 2 一种典型的锯齿形函数

两个基本的仿射映射为：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} x, \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

在这种情形，可以证明：

$$\dim_B \Gamma(g) - \dim_P \Gamma(g) = 2 - \alpha.$$

关于 $\Gamma(g)$ 的 Hausdorff 维数仍未解决. Ledrapier 于 1990 年证明，存在 α，使得：

$$\dim_H \Gamma(g) = 2 - \alpha,$$

注意到此结果亦支持猜想(1.2.3)式.

对于一般的分形曲线，A.N.Singh 将它们划分为三类：由分析方式生成的(如前述 Weierstrass 曲线)；由几何方式生成的(如 Koch 曲线)以及由算术性质确定的及其前述二种方式之间的混合. 对第三类分形曲线，目前所知甚少，李家龙与陈世荣在这方面取得一些较好的结果.

1.2.4　自相似测度的 Fourier 分析

1.　Parseval 公式

Wiener 的一个著名的定理指出：如果 μ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的任一有限测度，且 $\mu = \sum c_j \delta(x - a_j) + \nu$，其中 ν 为连续测度，那么，有如下 Parseval 公式：

$$\lim_{r\to\infty} r^{-n}\int_{B_r(y)} |(\mathrm{d}\mu)^{\wedge}(\xi)|^2 = c\sum |c_j|^2, \tag{1.2.5}$$

其中 y 为 $\mathbf{R}^n$ 中任一点，c 为单位球体积，记号 $\wedge$ 为 Fourier 变换.从(1.2.5)式中可以看到，仅仅是 μ 的离散部分有贡献，此可视为“零维”的情形.

另一方面，作为(1.2.5)式的另一极端，对于 n 维 Lebesgue 测度，Plancherel 公式为：

$$\lim_{r\to\infty}\int_{B_r(y)} |(f\mathrm{d}\mu)^{\wedge}(\xi)|^2 = (2\pi)^n\int |f(x)|^2\mathrm{d}x , \tag{1.2.6}$$

(1.2.5)式与(1.2.6)式左端积分号外的因子分别可视为 r^{0-n} 与 r^{n-n}.比较(1.2.5)式与(1.2.6)式，可以猜想，对适当的 α 维测度 μ，$0 < \alpha < n$，可能有：

$$\lim_{r\to\infty} r^{\alpha-n}\int_{B_r(y)} |(f\mathrm{d}\mu)^{\wedge}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi = c\int |f|^2\mathrm{d}\mu. \tag{1.2.7}$$

但是，这个猜想过强.事实上，在大多数情形，(1.2.7)式左端的极限甚至不存在.然而，这个猜想的思想是正确的，如果我们削弱一些结果，例如，将 lim 用 limsup 代替，可以在许多情形下获得与 $\|f\|_2^2$ 相比较的量值.特别地，自相似测度在此研究中体现出很有意思的性质.

2.　自相似测度

自相似测度定义为满足下述性质的概率测度：

$$\mu = \sum_{j=1}^{m} a_j \mu S_j^{-1}, \tag{1.2.8}$$

这里，$S_j x = \rho_j R_j x + b_j$ 为压缩相似映射，$0 < \rho_j < 1$，R_j 为正交映射，$0 < a_j < 1$，$\sum_{j=1}^{m} a_j = 1$，常数 a_j 称为权.J.E.Huchinson 证明，给定有限压缩相似映射及权，则存在唯一的自相似测度满足(1.2.8).

给定自相似测度 μ，μ 的自相似维数定义为：

$$\alpha = \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j \log a_j}{\sum_{j=1}^{m} a_j \log \rho_j}.$$

经典的 Cantor 测度对应于：

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2},$$

$$S_1 = \frac{x}{3},$$

$$S_2 = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}.$$

在某些附加条件下，Strichartz 证明了：μ 可以由 Hausdorff 维数为 α 的集合所支撑.他在某些假设下，得到了 μ 的 Fourier 变换的渐近性质：

$$\int_{|x| \leqslant R} |\mu^{\wedge}(x)|^2 \mathrm{d}x = O(R^{n-\beta}), \qquad R \to \infty. \tag{1.2.9}$$

在 Cantor 测度的情形，$\beta = \log 2 / \log 3$.但对于一般的自相似测度，β 尚未确定.此外，在前述结果中所附加的条件相当强，而且，(1.2.9) 式的意义亦远未被理解.但这些结果已提示出此方向的研究会十分丰富.可以令人相信的是：分形测度比起分形集来应起更重要的作用.尽管这方面的研究刚刚开始，但很快会成为一个活跃的课题.

1.2.5 分形的 Lipschitz 等价

1. Lipschitz 映射

一般来说，平面上两条不自交的连续曲线可以通过可逆的连续映射将其中的一条变到另一条.但这种分类过于粗糙，因为在这种分类下，我们不能区分线段(1 维)、Koch 曲线($\log 4 / \log 3$) 与 Peano 曲线(2 维).因此，需要寻求更细致的分类.由于曲线的复杂程度由维数刻画，而双 Lipschitz 映射保持维数(双 Lipschitz 映射定义为：若 $f: F \to \mathbf{R}^n$ 满足：

$$c_1 |x - y| \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant c_2 |x - y|, \qquad x, y \in F,$$

其中 $0 < c_1$，$c_2 < \infty$. 事实上，不难证明，若 f 为双 Lipschitz 映射，则：

$$\dim_H f(F) = \dim_H F$$

).

因此，希望通过 Lipschitz 映射来对分形集进行分类是非常自然的.目前，仅对非常少的集类得到满意的结果.Falconer 于 1988 年对准圆作了研究，准圆定义

如下：

定义1.2.3　集 F 称为准圆，若下述条件满足：

(i) F 同胚于圆周(即 F 为一简单闭曲线)；

(ii) F 为 s 集，即 $0 < H^s(F) < \infty$，且 $s = \dim_H F$；

(iii) 存在常数 $a, b, r > 0$，使得 $\forall U \subset F$，$|U| \leqslant r$，存在映射 $\varphi: U \to F$，满足：

$$a|x-y| \leqslant |U||\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant b|x-y|, \qquad x, y \in F.$$

K. Falconer 证明了：

$$\text{准圆 } E \text{ 与 } F \text{ 双 Lipschitz 等价} \Leftrightarrow \dim_H E = \dim_H F.$$

上述结果刻画出维数的本质.

2.　近似 Lipschitz 等价

准圆是一类性质非常特殊的集合. 对下面看起来非常“好”的集合，我们仅能建立“近似”Lipschitz 等价.

设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ 为一族 C^{1+r} 共形压缩，即 $\forall i$，存在 α_i, α'_i，$0 < \alpha_i, \alpha'_i < 1$，使得：

$$\alpha_i \leqslant \| D_W \varphi_i \| \leqslant \alpha'_i.$$

其中 $\varphi_i: V \to V$，$V \subset \mathbf{R}^n$ 为开集，$W \subset V$，且 $D_W \varphi_i$ 满足 r 阶 Lipschitz 条件. 在此条件下，类似于自相似集，存在紧集 E，使得 $E = \bigcup_{i=1}^{m} \varphi_i E$. 若紧集 E 为 Cantor 集，则称为准自相似 Cantor 集. 准自相似 Cantor 集均为 s 集.

K. Falconer 与 Marsh 于 1992 年证明了[12]：

若 $E, F \subset \mathbf{R}^n$ 为 C^{1+r} 阶准自相似 Cantor 集，令 $\lambda = \dim_H E / \dim_H F$，则 $\forall 0 < \eta < 1$，$\exists 0 < c, c' < \infty$，及双射 $f: E \to F$，使得对任意 $x, y \in E$，有：

$$\begin{aligned} c|x-y|^{\frac{\lambda}{\eta}} &\leqslant |f(x)-f(y)| \\ &\leqslant c'|x-y|^{\lambda\eta}. \end{aligned}$$

由于 η 可任意接近 1，因此上式为近似 Lipschitz 等价(注意到常数 c 与 c' 依赖于 η，因此不能令 η 趋于 1 而得到 Lipschitz 等价).

Lipschitz 等价的研究是分形几何一个非常重要的课题，这方面的进展应引起重视.

1.2.6　具有变尺度结构的分形集

我们熟知的分形集，如自相似集、自仿集等，均是通过迭代一个有限族的压缩映射生成的. 尽管这一压缩族中的各个压缩映射允许有不同的压缩比，但在每一次迭代中，使用的是相同的压缩族. 然而不论在理论上，还是在实际应用中，都遇到在迭代的过程中出现不同的压缩族.

1.　广义自相似集

华苏在 1992 年考虑了下述广义自相似集[13]：

设 $I=[0,1]^d$，考虑一族压缩族：

$$\Phi_1=\{\varphi_{11},\varphi_{12},\cdots,\varphi_{1n_1}\},$$

$$\Phi_2=\{\varphi_{21},\varphi_{22},\cdots,\varphi_{2n_2}\},$$

$$\cdots$$

$$\Phi_k=\{\varphi_{k1},\varphi_{k2},\cdots,\varphi_{kn_k}\},$$

其中每一个 φ_{ij} 均是压缩比为 c_{ij} 的相似压缩映射：

$$|\varphi_{ij}(x)-\varphi_{ij}(y)|=c_{ij}|x-y|,\qquad 0<c_{ij}<1.$$

记：

$$I_{j_1,\cdots,j_k}=\varphi_{k,j_k}\circ\cdots\circ\varphi_{2,j_2}\circ\varphi_{1,j_1}I,$$

$$F_n=\bigcup I_{j_1\cdots j_n},$$

$$F=\bigcap_{n\geqslant 1}F_n.$$

F 称为广义自相似集.

2.　广义自相似集的维数

广义自相似集维数的确定是一个较困难的问题，因为这不能从以前处理自相似集的技巧得出. 华苏运用了网测度及配齐降阶的技巧，在开集条件以及假设 $\inf c_{ij}>0$ 的条件下，得到下述结果[13]：

定理 1.2.6　设序列 $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ 满足：

$$\prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{N_i}c_{ij}^{s_k}\Big)=1,$$

则 $\dim_H F=\liminf\limits_{n\to\infty}s_n$.

利用上述两方法,苏峰研究了广义自相似集的重分形分解.

华苏,饶辉与文志英进一步处理了 $\inf c_{ij}=0$ 的情形,这种情形较 $\inf c_{ij}>0$ 的情形困难得多.饶辉与吴军发展了网测度技巧,建立了:

$$C_\epsilon H_G^{s+\epsilon}(F)\leqslant H_s(F)\leqslant H_G(F)$$

形式的网测度不等式,以此处理了一类 $\inf c_{ij}=0$ 的广义自相似集的维数.

另一类具有变尺度结构分形集为李家龙与文志英引入的复合递归集,这类分形集涉及到自由半群上的复合代换及矩阵的无穷乘积的谱的研究.

1.2.7　临界集的分形结构

设 $f\in C^1(\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^n)$,$A\subset\mathbf{R}^m$.若 $\forall x\in A$,Df_x 的秩至多为 r,则称 A 为秩 r 集.如果 A 为秩 $m-1$ 集,则称 A 为 f 的临界集.

Whitney 在 1935 年给出下面著名的例子:他构造出一个函数 $f\in C_1(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$,在一个连通临界集上非常数.伴随上述例子的一个问题是:在什么一般的条件下,Whitney 现象出现?或者考虑如下提法:给定 f,f 的临界集为连通闭集 A,那么该集与可求长性"相差多远",才能使得 f 在 A 上非常数.

Whyburn 指出:A 中任意两点要能被位于 A 中的一条可求长连通弧直接.Morse 与 Sard 则指出:f 要有足够的光滑性.

A.Norton 于 1986 年对上述问题给出了一个满意的回答[14],他利用 Hausdorff 维数来测量一个集合离可求长的"距离".他证明了:

(1) 若 $f\in C^{k+\beta}(\mathbf{R}^m,\mathbf{R})$,则出现 Whitney 现象的临界集的 Hausdorff 维数至少为 $k+\beta$;

(2) 这样的集合必须有一对点,它们不能同时位于任一 Hausdorff 维数小于 $k+\beta$ 的子集中.

这是第一个利用 Hausdorff 维数来描述临界集的结果,但远未对临界集的分形结构作出刻画.

参考文献

[1]B.B.Mandelbrot,The Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Francisco,1982

[2]B.B.Mandelbrot,L'Objets de Fractals, Universitaire Press,Paris,1990

[3]C. A. Rogers, Hausdorff Measures, Comb. Univ. Press, 1970

[4]K. J. Falconer, Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications, John Wiley & Sons, 1990

[5]S. J. Taylor, The Measure Theory of Random Fractals, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1986 (100): 333—406

[6]C. Tricot, Two definitions of Fractional Dimension, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1982 (91): 54—74

[7]M. F. Shlesinger, Proceedings of the Gaithersburg Symposium on Fractals in the Natural Sciences, Jour Stat. Phys, 1984(36): 519—912

[8]P. Kahane, Some Rondom Series of Functions, 2nd Edition, Comb. Univ. Press, 1985

[9]D. C. Sun and Z. Y. Wen, Dimension de Hausdorff des Series Trigonometriques Lacunaires, C. R. Acad. Sci., Paris, 1990, r(310): 135—140

[10]孙道椿、文志英,缺项级数定义的函数图像的 Bouligand 维数,科学通报,1993,38(6): 487 490

[11]T. Y. Hu and K. S. Lau, The Sum of Rademacher Functions and Hausdorff Dimension, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1990(108): 97—103

[12]K. Falconer and Marsh, Classifications of Quasi Circles by Hausdorff Dimensions, Non Linearity, 1989(2): 489 -493

[13]Hua Su(华苏),广义自相似集的 Hausdorff 维数,应用数学学报,1994

[14]A. Norton, A Critical Set with Nonnull Image has Large Hausdorff Dimension, Trans. Amer. Math. Soc., 1986(296): 367—376

[15]T. Bedford & M. Fisher, Analogues of the Lebesgue Density Theorem for Fractal Sets, Proc. Math. Soc., London, 1992, 64(3): 95 124

[16]T. Bedford & T. Kamae, Stieltjes Integration and Stochastic Calculas W. S. T. Self-Affine Functions, Jour. Indus. Appl. Math., Japan, 1991, 8(3): 445—459

[17]A. S. Besicovitch & H. D. Vrsell, Sets of Fractional Dimensions V: On Dimensional Numbers of Some Continus Curves, J. London Math. Soc., 1937(32): 142—153

[18]K. J. Falconer, The Hausdorff Dimension of Self Affine Fractals, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1988(103): 339—350

[19]K. J. Falconer, Wavelet Transforms and Order - Two Densities of Fractals, Jour. Stat. Phys., 1992, 67(3,4)

[20]K. J. Falconer, On the Lipschtiz Equivelence of Cantor Sets, Mathematics, 1992(39): 223—232

[21]M. Fisher, Integer Cantor Sets and an Orden-Two Ergodic Theorem, Preprint, Univ. Got-

tingen, 1990

[22]G. H. Hardy, Weierstrass's Non-Differentiable Function, Trans. Amer. Math. Soc., 1976 (17): 301—325

[23]J. Harrison, Denjov Fractal, Topology, 1989(28): 59 80

[24]J. Harrison, Continus Fractals and the Seifert Conjecture, Bull. AMS., 1985(13): 147—153

[25]J. Harrison and A. Norton, The Gauss -- Green Theorem for Fractal Boundarits, Duke. Math. Jour., 1992(67): 575—588

[26]M. Hata, Topological Aspects of Self - Similar Sets and Singular Functions, Fractal Geometry and Analysis, Eds J. Belar and S. Dubuc, Montreal, Academic Press, 1989: 255—276

[27]J. E. Hutchinson, Fractals and Self Similarity, Indian Univ. Math. J., 1981(30): 713—747

[28]S. Hudson and M. Leckband, Hardy's Inequality and Fractal Measures, J. Fun. Ana., 1992(108): 437—450

[29]J. L. Kaplan, J. Mallet - Paret and J. A. Yorke, The Lyapunov Dimension of a Nowhere Differentiable Attracting Torus, Ergodic Th Dyn Sys., 1984(4): 261—281

[30]K. A. Lau, Fractal Measures and Mean p-Variations, J. Fun. Ana., 1992(108): 427—457

[31]R. D. Mauldin and S. C. Williams, On the Hausdorff Dimension of some Graphs, Proc, Amer. Math. Soc., 1986(298): 793—803

[32]McMullen, The Hausdorff Dimension of General Siepinski Carpets, Nagoya Math. J., 1984(96): 1 9

[33]A. Norton, Functions not Constant on Fractal Quasi Arcs of Critical Points, Proc. Amer. Math. Soc., 1989(106): 397—405

[34]F. Przytycki and M. Urbanski, On the Hausdorff Dimension of some Fractal Sets, Studia Math., 1989(93): 155—186

[35]F. Rezakhalou, The Packing Measures of the Graphs and Level Sets of Certain Continuous Function, Math. Proc. Camb. Phil Soc., 1988(104): 347—360

[36]A. N. Singh, The Theory and Constuction of Nondifferentiable Function, Squaring the Eircle and Othen Monographc, New York, 1953

[37]R. Strichartz, Self Similar Measures and Their Fourier Transforms, Indiana Univ. Math. J., 1980(39): 797—817

[38]R. Strichartz, Wavelet Expansious of Fractal Measures, J. Geo. Analysis, 1991(1): 269—289

[39]R. Strichartz, Fourier Asymptotics of Fractal Measures, J. Fun. Ana., 1992(109): 154—187

[40]R. Strichartz, Spectral Asymptotics of Fractal Measures on Riemann Manifolds, J. Fun. Ana., 1991(102): 176--205

第二章
测度的局部分析

本章 2.1 节论述了测度局部分析的目的，使读者便于了解和比较以后的内容 .2.2 节介绍测度的维数理论，我们对度量空间上的正（Radon）测度引入下维数和上维数概念 .上维数在某些文献中曾出现过，但下维数几乎没有人注重.其实，上维数与下维数是孪生的，它们分别刻画测度的某种正则性和奇异性 . 上维数和下维数相等的测度被称为单维数测度 . 可以证明，通常遇到的遍历测度均为单维数测度 . 应当指出，维数的具体计算是一个很细致的工作，这是当前的研究热点之一 . 在发展测度的维数理论之前，我们将证明一个较深刻的定理，该定理断言，在完备度量空间上，Hausdorff 维数等于容量维数 . 这一结果是R. Kaufman 和 D. Howroyd 最近独立取得的 . 我们的证明基于R. Kaufman 的想法 . 欧氏空间上的这一结果称为 Frostman 定理，它是 Hausdorff 的维数理论的基本定理之一，并能使得我们可以采用较方便的解析工具，即位势方法 . 因此，在本章开始，先介绍了度量空间上的位势理论，其中最主要的是测度的 Kahane 正则奇异分解 . 我们指出，在未用 Kaufman – Howroyd 定理之前，P. Assouad 在紧致齐性(Coifman – Weiss 意义下)空间中得到了 Frobenius 定理. 在2.3 节中的 Gibbs 测度源于热动力学理论 .Gibbs 测度理论现已成为动力系统理论的基础部分之一 . 这一节要讨论的是D. Ruelle 的转移算

子定理. 所采用的证明，既不同于D. Ruelle 的原始证明，也不同于人们惯用的拟紧算子方法，而是建立在 Gibbs 测度理论之上．这一新证明，不依赖较深刻的定理，具有易读性．应该指出，这一定理的应用很广，例如对紧致 Riemann 流形上微分同胚的研究．我们介绍这一定理的主要目的是为了测度的重分形分析．重分形是2.4 节所讨论的内容．我们仅选取了两个较简单的例子进行讨论，一是符号空间上的乘积测度，二是 $\mathbf{R}^d$ 上的自相似测度．两者均为 Gibbs 测度．由于它们的构造简单且直接，其实并不需要利用 Gibbs 测度理论进行讨论．不过在一般情况下，Gibbs 测度理论是必要的，而且还需要大偏差理论的结果．

2.1 预备知识

在本节中，先回顾两个与矩阵有关的定理，即 Von Neumann 极大极小定理，以及 Perron – Frobenius 定理．然后介绍 Hausdorff 维数，以及基于 Vitali 覆盖引理证明的 Billingsley 定理．该定理提供一个计算维数的具体方法．接着讨论 $\mathbf{R}^d$ 空间上的凹函数和凸函数，以及它们的 Legendre 变换．最后介绍测度论熵和拓扑熵，以及与此有关的遍历定理和压力变分原理，这也是本节的重点．

2.1.1 矩阵论的两个定理

极大极小定理告诉我们，Hausdorff 维数等于容量维数．在下节中，要利用此定理证明 Kaufman 定理. 在2.3 节中，还要利用 Perron – Frobenius 定理构造一个称为 Parry – Markov – Gibbs 测度的 Gibbs 测度类．

1. Von Neumann 极大极小定理

设 A 为 $m\times n$ 实矩阵,考虑双线性型 $L:\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$

$$L(x,y)=x^tAy.$$

又设 Δ_x（相应为 Δ_y）为 $\mathbf{R}^m$（相应为 $\mathbf{R}^n$）的紧凸集．

先给出两个明显的引理．

引理2.1.1 下述不等式成立：

$$\max_{y\in\Delta_y}\min_{x\in\Delta_x}L(x,y)\leqslant\min_{x\in\Delta_x}\max_{y\in\Delta_y}L(x,y).\tag{2.1.1}$$

引理2.1.2　(2.1.1) 式中的等号成立，当且仅当 $\exists(\bar{x},\bar{y})\in\Delta_x\times\Delta_y$，使得 $\forall x\in\Delta_x, y\in\Delta_y$，有：

$$L(\bar{x},y)\leqslant L(\bar{x},\bar{y})\leqslant L(x,\bar{y}),$$

其中点 $(\bar{x},\bar{y})$ 称为鞍点．为使点 $(\bar{x},\bar{y})$ 成为鞍点，只需对某一 $\alpha\in\mathbf{R}$，有：

$$L(\bar{x},y)\leqslant\alpha,\quad L(x,\bar{y})\geqslant\alpha,\forall x\in\Delta_x,y\in\Delta_y.$$

现在介绍 Von Neumann 的极小极大定理．

定理2.1.1　设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，$L:\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 为双线性型，存在 $(\bar{x},\bar{y})\in\Delta_x\times\Delta_y$，使得：

$$L(\bar{x},\bar{y})=\max_{y\in\Delta_y}\min_{x\in\Delta_x}L(x,y)=\min_{x\in\Delta_x}\max_{y\in\Delta_y}L(x,y).\qquad(2.1.2)$$

证明　考虑连续函数 $B:\Delta_x\times\Delta_y\to\mathbf{R}$，$B$ 满足：$B(x,\cdot)$ 为凹函数，而 $B(\cdot,y)$ 为严格凸函数．

首先证明：如果将 B 代替 L，则等式成立．

因 $B(\cdot,y)$ 为严格凸函数，它仅在唯一的点 $p(y)$ 上达到极小值．令：

$$m(y)=B(p(y),y)=\min_{x\in\Delta_x}B(x,y).$$

因 $m(y)$ 为连续凸函数的下包络，因此它是上半连续的，从而在某点 $\bar{y}$ 达到极大值．令：

$$\alpha=m(\bar{y})=\max_{y\in\Delta_y}m(y),$$

则我们有：

$$B(x,\bar{y})\geqslant\alpha.$$

由引理2.1.2，可得到需证明的一半．为证另一半，需找一个 $\bar{x}$，使得 $B(\bar{x},y)\leqslant\alpha$．为此目的，对固定的 $y\in\Delta_y$，定义 $y_s=s\bar{y}+(1-s)y$，$0<s<1$，s 与 1 邻近，点 y_s 与 $\bar{y}$ 邻近．令 $x_s=p(y_s)\in\Delta_x$．由 $L(x,\cdot)$ 的凹性，我们有：

$$\begin{aligned}\alpha&\geqslant m(y_s)=B(x_s,y_s)\\&\geqslant sB(x_s,\bar{y})+(1-s)B(x_s,y)\\&\geqslant s\alpha+(1-s)B(x_s,y),\end{aligned}$$

由此得 $\alpha\geqslant B(x_s,y)$．由 Δ_x 的紧性，可选择得到 $s_n\to1$，使得 $x_{s_n}\to\bar{x}\in\Delta_x$．我们断言：

$$\bar{x}=p(\bar{y}).$$

事实上，由 x_s 的定义，$B(x_s,y_s)\leqslant B(x,y_s)$，$\forall x\in\Delta_x$. 根据 $B(\cdot,y)$ 的下半连续性，$B(x,\cdot)$ 的凸性及其上半连续性，以及 $B(x_s,y_s)\leqslant B(x,y_s)$，我们得到：

$$\begin{aligned}B(\bar{x},\bar{y})&\leqslant\liminf_{s_n\to1}B(x_{s_n},\bar{y})\\&\leqslant\liminf_{s_n\to1}[s_nB(x_{s_n},y)+(1-s_n)B(x_{s_n},y)]\\&\leqslant\liminf_{s_n\to1}B(x_{s_n},y_{s_n})\\&\leqslant\limsup_{s_n\to1}B(x_{s_n},y_{s_n})\\&\leqslant B(x,\bar{y}).\end{aligned}$$

因 $B(\cdot,\bar{y})$ 为严格凸函数，且有 $\bar{x}=p(\bar{y})$，$\bar{x}$ 由 $\bar{y}$ 唯一确定，而且依赖于 y 的选择，从而证明了 $(\bar{x},\bar{y})$ 为 $B(x,y)$ 的一个鞍点．

对于任意的 $\varepsilon>0$，考虑：

$$B_\varepsilon(x,y)=L(x,y)+\varepsilon\|x\|^2,$$

其中 $\|x\|$ 表示 x 的欧几里德范数，B_ε 具有与 B 相同的性质．设 $(\bar{x}_\varepsilon,\bar{y}_\varepsilon)$ 为 B_ε 的一个鞍点，由 Δ_x,Δ_y 的紧性，存在序列 $\varepsilon_n\to0$，使得 $\bar{x}_{\varepsilon_n}\to\bar{x}$，$\bar{y}_{\varepsilon_n}\to\bar{y}$. 因为：

$$\begin{aligned}L(\bar{x}_{\varepsilon_n},y)+\varepsilon_n\|\bar{x}_{\varepsilon_n}\|&\leqslant L(\bar{x}_{\varepsilon_n},\bar{y}_{\varepsilon_n})+\varepsilon_n\|\bar{x}_{\varepsilon_n}\|^2\\&=L(x,\bar{y}_{\varepsilon_n})+\varepsilon_n\|x\|^2,\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，得：

$$L(\bar{x},y)\leqslant L(\bar{x},\bar{y})\leqslant L(x,\bar{y}).$$

2. Perron　Frobenius 定理

设 $A=(a_{ij})$ 为 $m\times m$ 矩阵，若 $a_{ij}\geqslant0,1\leqslant i,j\leqslant m$，则称 A 为非负矩阵．若对任一 (i,j)，存在正整数 $n=n(i,j)$，使得 $a_{i,j}^{(n)}>0$，其中 $a_{i,j}^{(n)}$ 为不可约矩阵 A^n 中位于 (i,j) 位置的元素，则称 A 为不可约矩阵．若存在 $n>0$，使得 $A^n>0$，则称矩阵 A 为本原矩阵. 这里 $A>0$ 表示矩阵 A 的所有元素均严格大于零．

定理2.1.2[1]　设 $A=(a_{ij})$ 为非负矩阵，则：

(i) 存在非负特征值 λ，使得 A 的特征值的绝对值不大于 λ；

(ii) 对应于 λ,存在非负左特征向量 $u=(u_1,\cdots,u_m)$ 及非负右特征向量 $v=(v_1,\cdots,v_m)^t$;

(iii) 若 A 为不可约矩阵,则 λ 是单重的,且相应的特征向量是严格正的,即对每个 i,有 $u_i>0,v_i>0$;

(iv) 若 A 为本原矩阵,则其他特征值的绝对值都严格地小于 λ.

2.1.2 Hausdorff 维数

1. 定义与性质

设(X,d)为度量空间.若 U 为 X 的子集,以 $|U|$ 表示 U 的直径.设 $E\subset\bigcup_i U_i,0<|U_i|\leqslant\delta$,则称$\{U_i\}$为 E 的一个 δ-覆盖.

令 $E\subset X,\alpha>0$,对 $\delta>0$,定义:

$$H_\delta^\alpha(E)=\inf\sum_{i\geqslant 1}|U_i|^\alpha,$$

这里对 E 的所有 δ-覆盖取下确界.令 $\delta\to 0$,得到 E 的 α-Hausdorff(外)测度:

$$H^\alpha(E)=\lim_{\delta\to 0}H_\delta^\alpha(E).$$

对任意 $E\subset X$,$H_\delta^\alpha(E)$为 α 的非增函数.进一步,若 $\alpha<\beta$,则 $H_\delta^\alpha(E)\geqslant\delta^{-(\beta-\alpha)}H_\delta^\beta(E)$,从而若 $H^\beta(E)>0$,则 $H^\alpha(E)$为无穷.因而存在唯一的数,记为 $\dim E$,称为 E 的 Hausdorff 维数,满足:

$$若\ 0\leqslant\alpha<\dim E,则\ H^\alpha(E)=\infty,$$

$$若\ \dim E<\alpha<\infty,则\ H^\alpha(E)=0.$$

下面是 Hausdorff 测度的一些常用的性质[2,3]:

(1) H^α 可测集类包含 Borel 集类.

(2) 若 $E\subset F$,则 $\dim E\leqslant\dim F$.

(3) 设$\{E_i\}$为 X 的可列集族,则:

$$\dim\bigcup_{i\geqslant 1}E_i=\sup_{i\geqslant 1}\dim E_i.$$

在欧氏空间中,更有:

(4) $H^\alpha(E+a)=H^\alpha(E),\forall a\in\mathbf{R}^n$.

(5) $H^\alpha(\lambda E)=\lambda^\alpha H^\alpha(E),\forall\lambda>0$.

2. Vitali 覆盖定理

Vitali 覆盖定理有几种变形，下面是其中的一种形式.

定理2.1.3 设 X 为紧度量空间，S 为 X 的子集．设 $\mathscr{F}$ 为一族具有下列性质的 X 的子集族：$\forall s \in S, \delta > 0, \exists E \in \mathscr{F}$，使得 $s \in E, |E| \leqslant \delta$，则在 $\mathscr{F}$ 中存在可列个互不相交集的集族 $\{E_n\}$，使得：

$$S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n(3\delta),$$

其中 $A(\varepsilon)$ 表示集 A 的 ε - 邻域，即 $\{x \in X: d(x, A) \leqslant \varepsilon\}$. 定理中的集族 $\mathscr{F}$ 称为集合 S 的一个 Vitali 覆盖．

3. Billingsley 定理

该定理给我们提供了计算一个集合的 Hausdorff 维数的工具，其本质为"质量分布原理"[2].

定理2.1.4 设 X 为 σ - 紧度量空间，$E \subset X$，为一 Borel 集．

(i) 若存在测度 $\mu \in M^+(X)$，使得 $\mu(E) > 0$，且对任意 $x \in E$，有：

$$\liminf_{r \to 0} \frac{\log\mu(B(x,r))}{\log r} \geqslant \alpha,$$

则 $\dim E \geqslant \alpha$.

(ii) 若存在非零测度 $\mu \in M^+(X)$，使得对任意 $x \in E$，有：

$$\liminf_{r \to 0} \frac{\log\mu(B(x,r))}{\log r} \leqslant \alpha,$$

则 $\dim E \leqslant \alpha$.

证明 (i) 设 $\varepsilon > 0$. 由定理假设，对任意 $x \in E$，有正常数 $r_0(x)$，使得：

$$\mu(B(x,r)) \leqslant r^{\alpha-\varepsilon}, \qquad \forall 0 < r \leqslant r_0(x).$$

这是 μ 在 E 上的一个局部正则性质．令 $\delta > 0$，选择 $E_\delta \subset E$，使得 M 在 E_δ 上一致正则，即上述 $r_0(x)$ 不依赖于 x. 我们定义：

$$E_\delta = \{x \in E: \mu(B(x,r)) \leqslant r^{\alpha-\varepsilon}, \forall 0 \leqslant r \leqslant \delta\}.$$

由局部正则性得 $\delta \to 0$ 蕴含 $E_\delta \to E$.

令 $\{U_i\}$ 为 E（从而为 E_δ）的一个 δ - 覆盖．对任一包含点 $x \in E_\delta$ 的 U_i，有 $U_i \subset B(x, \operatorname{diam} U_i)$. 因 $x \in E_\delta$，故有：

$$\mu(U_j) = \mu(B(x, \operatorname{diam} U_j)) \leqslant (\operatorname{diam} U_j)^{\alpha-\epsilon},$$

从而，

$$\mu(E_\delta) \leqslant \mu(E) \leqslant \sum_{j: U_j \cap E_\delta \neq \varnothing} \mu(U_j) \leqslant \sum (\operatorname{diam} U_j)^{\alpha-\epsilon},$$

由此推出：

$$H^{\alpha-\epsilon}(E) \geqslant H_\delta^{\alpha-\epsilon}(E) \geqslant \mu(E_\delta).$$

但是对于足够小的 δ，$\mu(E_\delta) > 0$，故 $H^{\alpha-\epsilon}(E) > 0$.

(ii) 由 X 的 σ - 紧性及 Hausdorff 维数的 σ 稳定性，我们可以假设 X 为紧的．

定理的假设蕴含：对任意 $x \in E$，存在一列正数 $r_n(x)$，使得 $r_n(x) \to 0(n \to \infty)$，而且有：

$$\mu(B(x, r)) \geqslant r_n(x)^{\alpha+\epsilon}, \qquad n \geqslant 1.$$

注意到集族 $\{(B(x, r_n(x)) : x \in E, n \geqslant 1\}$ 为 E 的一个 Vitali 覆盖，由定理 2.1.3，我们可以挑选一个互不相交可列子集族 $\{B(x_j, 4r_j)\}$，使得集族 $\{B(x_j, r_j)\}$ 为 E 的一个覆盖．从而有：

$$\begin{aligned} H_{8\delta}^{\alpha+\epsilon}(E) &\leqslant \sum_j (8r_j)^{\alpha+\epsilon} \\ &\leqslant 8^{\alpha+\epsilon} \sum_j \mu(B(x_j, r_j)) \\ &\leqslant 8^{\alpha+\epsilon} \mu(X) < \infty, \end{aligned}$$

故得 $H^{\alpha+\epsilon}(E) < +\infty$.

由此定理立刻得到，为保证 $\dim E = \alpha$，只需找到一个测度 μ，使得 $\mu(E) > 0$，而且有：

$$\liminf_{r \to 0} \frac{\log \mu(B(r, x))}{\log r} = \alpha.$$

在维数的计算中，人们常常用到的是这一形式的 Billingsley 定理．

2.1.3 Legendre 变换

尽管下面的讨论对一般的拓扑向量空间适用，但为叙述方便，我们仅限制在 $\mathbf{R}^n$ 中讨论．为了强调其对偶性，所以用 $(\mathbf{R}^d)^*$ 表示 $\mathbf{R}^d$ 的对偶空间，简记为 $\mathbf{R}^{d*}$．这节的内容是为重分形的讨论做准备的．

1. 上半连续性与凹性

函数 $F:\mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ 称为上半连续(u.s.c.),如果对任意 $a \in \mathbf{R}$,集合:

$$\{x \in \mathbf{R}^d : F(x) < a\}$$

为开集. 这等价于对任意 $x \in \mathbf{R}^d$,有:

$$\limsup_{y \to x} F(y) \leqslant F(x).$$

例如,连续函数以及闭集的示性函数均为 u.s.c.

给定一个 u.s.c.函数族,有一个产生 u.s.c.函数的标准方法,即 u.s.c.函数族的下确界(亦称下包络)是 u.s.c 函数.

定义在一个紧集上的 u.s.c.函数达到它的上确界.

仿射(连续)函数的下包络构成一大类 u.s.c.函数. $\mathbf{R}^d$ 上的仿射函数形如 $<\cdot, y> - \alpha$,其中 $y \in \mathbf{R}^{d*}$,$\alpha \in \mathbf{R}$. 以 $\Gamma(\mathbf{R}^d)$ 记这些包络族,容易看到,$\Gamma(\mathbf{R}^d)$ 中的函数 F 为凹的,且为 u.s.c.

若 F 在某点取值 $+\infty$,则 $F(x) = +\infty$. 事实上,$\Gamma(\mathbf{R}^d)$ 中的函数可由上述性质刻画. 在 $\Gamma(\mathbf{R}^d)$ 中,存在恒等于 $+\infty$ 与恒等于 $-\infty$ 的函数,所有其他的函数应取值 $+\infty$,但可能取值 $-\infty$. 一个 u.s.c.凹函数,若既不恒为 $+\infty$,亦不恒为 $-\infty$,则称为"恰当的". 我们定义它的定义域为:

$$\mathrm{dom}F = \{x \in \mathbf{R}^d : -\infty < F(x) < +\infty\}.$$

这样的函数在其定义域的内点上是连续的.

2. Legendre 变换

设 $F:\mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ 为任一函数. 所有控制 F 的 u.s.c.凹函数族的下包络 F 称为 F 的正则化. $\bar{F}$ 即为所有控制 F 的最小的 u.s.c.凹函数. 下面,我们将以更明显的方式由 F 构造 $\bar{F}$,即 F 的 Legendre 变换.

代替所有的 u.s.c.凹函数,我们只需用控制函数来定义 $\bar{F}$. 设 $<\cdot, y> - \alpha$ 为一仿射函数,则它控制 F 当且仅当:

$$\alpha \leqslant < x, y > - F(x), \qquad \forall x \in \mathbf{R}^d.$$

因此 α 的最好的选择是:

$$F^*(y) = \inf_{x \in \mathbf{R}^d} \{< x, y > - F(x)\}.$$

函数 $F^*:\mathbf{R}^{d*} \to \mathbf{R}$ 称为 F 的 Legendre 变换. 其几何解释为: $F^*(y)$ 为 y 方向的 F 的"切线"的纵坐标. 类似地,定义 F^* 的 Legendre 变换为:

$$F^{**}(y) = \inf_{y \in \mathbf{R}^{d*}} \{< x, y > - F^{*}(y)\}.$$

注意到 F^{**} 定义在 $\mathbf{R}^d$ 上并已被正则化，F^{**} 与 F 的关系为 $F^{**} = \bar{F}$. 因此，取两次 Legendre 变换，便得到 F 的正则化．从而，对任意 $F:\mathbf{R}^d \to \bar{\mathbf{R}}$，我们有 $F^{*} = F^{***}$.

事实上，$F^{**} = \bar{F} \geqslant F$，故 $F^{***} \leqslant F^{*}$. 另一方面，

$$F^{**}(x) \leqslant < x, y > - F^{*}(y), \forall x \in \mathbf{R}^d,$$

则：

$$F^{*}(y) \leqslant < x, y > - F^{**}(y),$$

由此得 $F^{*} \leqslant F^{***}$.

下面是 Legendre 变换的一些性质：

(1) $F^{*}(0) = -\sup\limits_{x \in \mathbf{R}^d} F(x)$.

(2) $F_a^{*}(y) = F^{*}(y) + < a, y >$，其中 $F_a(x) = F(x - a)$.

(3) 若 $F \leqslant G$，则 $F^{*} \geqslant G^{*}$.

(4) 若 $\lambda > 0$，则 $(\lambda F)^{*}(y) = \lambda F^{*}(y / \lambda)$.

(5) 若 $\alpha \in \mathbf{R}$，则 $(F + \alpha)^{*}(y) = F^{*} - \alpha$.

(6) $(\inf F_i)^{*} = \sup F_i^{*}$，$(\sup F_i)^{*} \leqslant \inf F_i^{*}$.

如果我们希望找到函数 F 所控制的所有下半连续(u.s.c.)凸函数的上包络，就自然地会考虑下述变换(仍称其为 Legendre 变换)：

$$F^{\star}(y) = \sup_{x \in \mathbf{R}^d} \{< x, y > - F(x)\}$$

F^{*} 与 $F^{\star}$ 之间的关系为：

$$(-F)^{\star}(y) = -(-F)^{*}(y).$$

从而，在本质上，$F^{\star}$ 并无新的东西．因此，只需讨论 F^{*}.

例2.1.1 设 $F:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 为可微严格凹函数，令 $f = F'$，$g = g^{-1}$，则：

$$F^{*}(y) = yg(y) - F(g(y)).$$

特别，若：

$$F(x) = -\frac{1}{\alpha} | x |^{\alpha}, 1 < \alpha < +\infty,$$

则：

$$F^{*}(y) = -\frac{1}{\alpha^{*}} | y |^{\alpha^{*}},$$

其中，

$$\frac{1}{\alpha^*}+\frac{1}{\alpha}=1.$$

2.1.4 熵

1. 紧空间上的拓扑动力系统

这里，我们仅解释紧度量空间上的连续映射的不变测度的存在性．设 X 为以 d 为度量的紧度量空间，$T:X\to X$ 为一连续映射，则 (X,T) 称为拓扑动力系统．映射 T 诱导两个算子，一个定义在连续函数空间 $C(X)$ 上：

$$Tf(x)=f(Tx),\qquad f\in C(X);$$

另一个定义在由测度构成的空间 $M(X)$ 上：

$$T\mu=\mu(T^{-1}),\qquad \mu\in M(X).$$

由于同一符号 T 扮演两个角色，为了不产生混淆，我们将 $T\mu$ 记作 μT．这在 Markov 算子理论中常常使用．对于 $M(X)$ 的一个测度 μ 以及 X 上的一个函数 f，f 关于 μ 的积分记为 $<f,\mu>$（如果这个积分存在），从而 $C(X)$ 与 $M(X)$ 之间的对偶性可以表示为：

$$<Tf,\mu>=<f,\mu T>.$$

$M_1^+(X)$ 表示 X 上正概率测度全体的空间．因 $M_1^+(X)$ 为紧凸集，而 $T:M_1^+(X)\to M_1^+(X)$ 为仿射且连续，从而 Markov Kakutani 定理[4] 保证了 T 有一个不动点 μ，即 $\mu T=\mu$．这样的不动点称为 (X,T) 的不变测度．所有不变测度仍构成一非空紧凸集，记为 $M_T(X)$．

如果不假定 X 的紧性，就不能保证不变测度的存在性．一个平凡的例子为 $X=\mathbf{R}$，$Tx=x^2+1$．

2. 遍历定理

设 $(X,\mathscr{B},\mu)$ 为一概率空间，$T:X\to X$ 为一可测变换（即：$T^{-1}\mathscr{B}\subset\mathscr{B}$），如果 $\mu T=\mu$，称 T 为保测映射．有时，μ 亦称为 T 的不变测度．我们称 $(X,\mathscr{B},T,\mu)$ 为一动力系统，或更精确地，称为保测动力系统．

一个可测集 $B\in\mathscr{B}$，称 B 为不变集，如果 $T^{-1}(B)=B$．所有的不变集构成 $\mathscr{B}$ 的一个子 σ－域，用 J 来表示．定义在 X 上的函数称为不变的，如果它是 J－可测的．如果 μ 在 J 上是平凡的，则系统 $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ 称为遍历的，即

对任何 $A \in J$，$\mu(A)=0$ 或 $\mu(A)=1$.我们亦称 μ 或 T 是遍历的．

定理 2.1.5[4,5]**（Birkhoff 遍历定理）**　设 $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ 为一动力系统，则对任意 $f \in L^1(\mu)$，均有：

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x))$$

μ – 几乎处处收敛到一个不变函数 f^*，使得 $<f^*,\mu>=<f,\mu>$．此外，若 T 是遍历的，则 f^* 是 μ – 几乎处处（对于 μ）等于常数的．

人们还得到一些其他类型的遍历定理，其中，Chacon – Ornstein 遍历定理是一个非常一般的定理，常用来处理正压缩算子，称为次 Markov 算子.

我们称 $T: L^1(X,\mu) \to L^1(X,\mu)$ 为次 Markov 算子，如果：

$$\| Tf \| = \| f \|, 0 \leqslant f \in L^1 \text{ 蕴含 } Tf \geqslant 0,$$

其中 μ 为 σ – 有限集.如果进一步有 $T^*1=1$，则 T 称为 Markov 算子．一个次 Markov 算子称为保守的，如果有：

$$0 \leqslant f \in L^1(X) \text{ 蕴含 } \sum_{k=0}^{\infty} T^k f = 0 \text{ 或 } +\infty, \qquad \mu - a.e.;$$

或称为遍历的，如果有：

$$0 \leqslant f \in L^1(X), f \neq 0 \text{ 蕴含 } \sum_{k=0}^{\infty} T^k f = \infty, \qquad \mu - a.e.$$

定理 2.1.6[4]**（Chacon – Ornstein 定理）**　设 $T: L^1(\mu) \to L^1(\mu)$ 为保守奇次 Markov 算子．对于任意 $f \in L^1(\mu)$ 及 $0 \leqslant g \in L^1(\mu)$，有：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} T^j f}{\sum_{j=1}^{n} T^j g} = \frac{E_\mu(f \mid J)}{E_\mu(g \mid J)}$$

在集 $\left\{x \in X: \sum_{j=0}^{\infty} T^j(g) > 0\right\}$ 上 μ – 几乎处处成立．

最后，我们指出，T 为保守算子的一个简单判别法：对某一函数 $0 < \varphi \in L^1(\mu)$，则 $\sum_{j=0}^{\infty} T^j \varphi = +\infty$ 为 μ – 几乎处处成立．

3.　测度熵

由 Kolmogorov 于 1958 年引入的熵的概念，是一种对随机性与无序性的测量．它在物理学、信息论与遍历理论中起着重要的作用．

我们从简单的物理观察开始,假定有 N 个相同的分子的孤立系统,它们中的每一个有 m 个可解的状态(位置一动量)$\Sigma_1,\Sigma_2,\cdots,\Sigma_m$. 系统的一个典型的状态是:$N_1$ 个分子处于状态 $\Sigma_1,\cdots;N_m$ 个分子处于状态 Σ_m,其中 $N_1,\cdots,N_m\geqslant 0,N_1+\cdots+N_m=N$. 这样的系统状态的总数为:

$$\frac{N!}{N_1!\cdots N_m!}.$$

Boltzmann 证明了熵(物理意义下)正比于它的状态的相对概率的对数. 从而,状态$(N_1,\cdots,N_m)$的熵近似于:

$$S\Leftrightarrow N\log N-\sum_{j=1}^{m}N_j\log N_j=N\sum_{j=1}^{m}p_j\log p_j,$$

此处 $p_j=N_j/N$.

设$(X,\mathscr{B},T,\mu)$为一动力系统,它的熵分下列三步定义:

(1) 令 $\xi=\{A_1,\cdots,A_n\}$为X的一个有限分划,即 A_j 互不相交,并且 $X=\bigcup_j A_j$. 定义 ξ 的熵为:

$$H_\mu(\xi)=-\sum_{j=1}^{n}\mu(A_j)\log\mu(A_j).$$

(2) 若 $\eta=\{B_1,\cdots,B_l\}$ 为 X 的另一个分划,我们以 $\xi\vee\eta$ 记ξ与η的加细,即由 $A_i\cap B_j(1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant l)$ 组成的分划. 类似地,先定义 $\bigvee_{i=1}^{n-1}T^{-i}(\xi)$,并由此定义 T 的关于ξ的熵为:

$$h_\mu(T,\xi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}(\xi)\Big).$$

(3) 定义 T 的熵为:

$$h_\mu(T)=\sup_\xi h_\mu(T,\xi),$$

其中对 X 的所有有限分划取上确界.

在上述定义中,必须证明对任意有限分划 ξ,(2) 步中的极限存在. 这一点由下述性质保证:

$$H_\mu(\xi\vee\eta)\leqslant H_\mu(\xi)+H_\mu(\eta),$$

$$H_\mu(T^{-1}\xi)\leqslant H_\mu(\xi),$$

因这些不等式蕴含序列 $H_\mu(\bigvee_{i=1}^{n-1}T^{-i}\xi)$ 是次可加的.

由定义直接计算 $h_\mu(T)$ 是困难的,因为我们必须对所有有限分划 ξ 去计算 $h_\mu(T,\xi)$. 于是很自然地要寻求关于 ξ 的条件,使得 $h_\mu(T)=h_\mu(T,\xi)$,从而简化熵的计算. 如果不易做到这点,可试图找一列有限分划序列 $\{\xi_n\}$,使得:

$$h_\mu(T)=\lim_{n\to\infty} h_\mu(T,\xi_n).$$

定理2.1.7[5]**(Kolmogorov - Sinai 定理)**　设 $(X,\mathscr{B},T,\mu)$ 为一个动力系统. 假定 ξ 为一有限分划,使得 $\bigvee_{i=1}^{\infty} T^{-i}\hat{\xi}=\mathscr{B}(\mathrm{mod}\,\mu)$,则:

$$h_\mu(T)=h_\mu(T,\xi),$$

这里 $\hat{\xi}$ 表示由 ξ 生成的 σ - 域. 注意到对两个不同的分划 ξ 和 η,用 $\xi\leqslant\eta$ 表示 $\hat{\xi}\subset\hat{\eta}$. 在此情形,我们称 η 比 ξ 细. 具有 $\bigvee_{i=0}^{\infty} T^{-i}\hat{\xi}=\mathscr{B}$ 这一性质的分划 ξ 称为一个生成元.

定理 2.1.8[5]　设 $(X,\mathscr{B},T,\mu)$ 为一动力系统,$\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列有限分划,使得 $\xi_1\leqslant\xi_2\leqslant\cdots\leqslant\xi_n\leqslant\cdots$,且 $\bigvee_{i=1}^{\infty}\xi_i=\mathscr{B}(\mathrm{mod}\,\mu)$,则:

$$h_\mu(T)=\lim_{n\to\infty} h_\mu(T,\xi_n).$$

4.　拓扑熵

拓扑熵作为拓扑共轭的一个不变量于 1965 年引入. 它是测度熵的一种类似,它们与变分原理相关. 拓扑熵有许多等价的定义. 我们采取用原始的开覆盖定义.

设 X 为以 d 为度量的紧度量空间,其拓扑熵分三步定义:

(1) 设 α 为 X 的一个开覆盖,即一族开集,它们的并为 X. 定义 α 的熵为:

$$H(\alpha)=\log N(\alpha),$$

其中 $N(\alpha)$ 表示具有最小基数的有限子覆盖的集合的数目.

(2) 设 β 为 X 的另一个覆盖,以 $\alpha\vee\beta$ 记由 $A\cap B$,$A\in\alpha$,$B\in\beta$,构成的加细覆盖. 同样地,$\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha$ 产生一个新的加细覆盖. 我们定义 T 相对 α 的熵为:

$$h(T,\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\alpha\right).$$

(3) T 的熵定义为：

$$h(T)=\sup_{\alpha}h(T,\alpha),$$

其中 α 取遍 X 的所有开覆盖．

注意，(2) 步的极限存在，因为：

$$N(\alpha\vee\beta)\leqslant N(\alpha)N(\beta),$$

$$N(T^{-1}\alpha)\leqslant N(\alpha).$$

与测度熵一样，由定义直接计算拓扑熵是困难的．但我们有下述结果：

定理 2.1.9[5]　设 (X,d) 为紧度量空间．若 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一列 X 的开覆盖，且 $\mathrm{diam}(\alpha_n)\to 0$，则：

$$h(T)=\lim_{n\to\infty}h(T,\alpha_n).$$

如果 T 是一个扩张同胚，则有一个更好的结果．此结果类似于计算测度熵的 Kolmogorov - Sinai 定理．

紧度量空间的一个同胚 T 称为扩张的，如果存在正数 $\delta>0$，使得若 $x\neq y$，则存在整数 $n\in\mathbf{Z}$，有 $d(T_x^n,T_y^n)\geqslant\delta$.

可以证明，T 为一扩张同胚等价于 T 有一弱生成元．弱生成元定义为具有下述性质的有限开覆盖 α：对由 α 的元素组成的任一序列 $\{A_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$，集 $\bigcap_{-\infty}^{+\infty}T^{-n}A_n$ 最多包含 X 的 1 个点．

定理2.1.10[5] 设 $T:X\to X$ 为紧度量空间 X 的扩张同胚．若 α 为弱生成元，则：

$$h(T)=h(T,\alpha).$$

扩张同胚的一个典型例子是下面将要研究的符号空间的双边移位．

5.　*拓扑压力与变分原理*

拓扑压力的概念是拓扑熵概念的进一步推广．它通过变分原理与测度熵相联系．由此原理，我们将引入平衡态的概念．

设 $\varphi\in C(X)$，$n\geqslant 1$，记：

$$S_n\varphi(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(T^jx).$$

若 α 为 X 的一个开覆盖，令：

$$p_n(T,\varphi,\alpha)=\inf_{\beta}\left\{\sum_{B\in\beta}\sup_{x\in B}e^{S_n\varphi(x)}\right\},$$

其中 β 取遍 $\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\alpha$ 的所有有限子覆盖．通过证明不等式：

$$p_{n+m}(T,\varphi,\alpha)\leqslant p_n(T,\varphi,\alpha)p_m(T,\varphi,\alpha),$$

可以证明下述极限的存在性：

$$P(T,\varphi,\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log p_n(T,\varphi,\alpha).$$

φ 的拓扑压力 $P_\tau(\varphi)$ 定义为：

$$P_\tau(\varphi)=P(T,\varphi)=\lim_{\delta\to 0}\sup_{\text{diam}\alpha\leq\delta}P(T,\varphi,\alpha).$$

下述定理给出拓扑压力的另一个定义．

定理2.1.11[5] 设 $T:X\to X$ 为连续映射，若 $\{\alpha_n\}$ 为一开覆盖序列，其直径 $\text{diam}\alpha_n\to 0$，则：

$$P(T,\varphi)=\lim_{n\to\infty}P(T,\varphi,\alpha_n).$$

对于扩张同胚，我们有更好一些的结果．例如：

定理2.1.12[5] 设 $T:X\to X$ 为紧度量空间上的扩张同胚，若 α 为弱生成元，则：

$$P(T,\varphi)=P(T,\varphi,\alpha).$$

变分原理建立了拓扑压力与测度熵之间的关系，特别是拓扑熵与测度熵之间的关系．

定理 2.1.13　设 $T:X\to X$ 为紧度量空间上的连续映射，$\varphi\in C(X)$，则：

$$P(T,\varphi)=\sup_{\mu\in M_T(X)}\{h_\mu(T)+\langle\varphi,\mu\rangle\}.$$

注意到作为 μ 的函数，$h_\mu(T)$ 是凹的，而 $\langle\varphi,\mu\rangle$ 是线性的．因此，$h_\mu(T)+\langle\varphi,\mu\rangle$ 是凹的．另一方面，$\langle\varphi,\mu\rangle$ 是连续的．作为 μ 的函数，如果 $h_\mu(T)$ 为上半连续，则有：

$$P(T,\varphi)=\max_{\mu\in M_T(X)}\{h_\mu(T)+\langle\varphi,\mu\rangle\}.$$

若 μ 是对于 T 的不变测度，且 $h_\mu(T)+\langle\varphi,\mu\rangle=P(T,\varphi)$，则 μ 称为关于 φ 的一个平衡态．

$h_\mu(T)$的上半连续性将保证平衡态的存在性．下面是一个使$h_\mu(T)$具有上半连续性的充分条件．

定理2.1.14[5]设 $T: X\to X$ 为紧度量空间上的扩张同胚，则 T 的熵映射$h_\mu(T)$是上半连续的．

6． 符号系统

设 S 为 m （$m\geqslant 2$）个元素的集合，在 S 上赋予离散拓扑．在 $\Sigma_S^+=S^N$ 上赋予由 S 诱导的乘积拓扑．Σ_S^+ 中的一点 x，记为 $x=(x_0,x_1,\cdots,x_n)$，或者 $x_0x_1\cdots x_n$，或者 (x_n)．空间 Σ_S^+ 称为单边符号空间．它是一个紧度量空间．

不妨令$S=\{0,1,\cdots,m-1\}$，记 Σ_S^+ 为 Σ_m^+．Σ_m^+．在下述运算下成为紧群：

$$(x_n)+(y_n)=(x_n+y_n(\mathrm{mod}\,m)).$$

单边移位 $T:\Sigma_m^+\to\Sigma_m^+$ 定义为$(T_x)_n=x_{n+1}$．它是 m 到1的、并且是满的映射，易见 T 的连续性．

令 $x\in\Sigma_m^+$，柱集 $I_n(x)$ 由下式定义：

$$I_n(x)=\{y=(y_j)\in\Sigma_m^+:y_j=x_j,0\leqslant j<n\}.$$

所有包含 x 的柱集构成 x 的一个拓扑基．

设 $A=(a_{ij})$ 为 $n\times n$ 矩阵，$a_{ij}\in\{0,1\}$．令：

$$\Sigma_A^+=\{x=(x_n)\in\Sigma_m^+:a_{x_nx_{n+1}}=1,n\geqslant 0\}.$$

显然，Σ_A^+ 为 Σ_m^+ 的闭子集，并且对于 T 不变，即 $T(\Sigma_A^+)\subset\Sigma_A^+$．有序对$(\Sigma_A^+,T)$，称为单边拓扑 Markov 链，或由矩阵 A 确定的有限型子移位．

同样可以定义双边符号空间 $\Sigma_m=S^N$ 与双边拓扑 Markov 链．用类似的方法可以定义双边移位 $T:\Sigma_m\to\Sigma_m$，以及双边子移位 $T:\Sigma_A\to\Sigma_A$，此时，T 为 -同胚．

Σ_m^+ 上的一个相容度量为$d(x,y)=e^{-n(x,y)}$，其中：

$$n(x,y)=\inf\{j\geqslant 0:x_j\neq y_j\},\qquad x,y\in\Sigma_m^+,$$

或

$$n(x,y)=\inf\{|j|\geqslant 0:x_j\neq y_j\},\qquad x,y\in\Sigma_m^+.$$

显然，Σ_A 上的双边移位是扩张同胚．

7． 拓扑动力系统的性质

下面是拓扑动力系统(Σ_A^+,T)的一些性质．

取值于 $S=\{0,1,\cdots,m\}$ 的有限序列 $w=w_1\cdots w_k$ 称为词．如果 $a_{w_{j-1}w_j}=1(2\leqslant j\leqslant k)$，则称 w 为允许词．

性质2.1.1　假定矩阵 A^k 在第 i 行第 j 列的元素为 p，即 $(A^k)_{ij}=p$，则 p 为由 i 开始、以 j 结尾、长度为 k 的允许词的数目，此种词形如 $is_1s_2\cdots s_{k-1}j$．

证明　对 k 用归纳法证明．令 $N(k,i,j)$ 为所考虑的词的数目．$N(1,i,j)$ 非 1 即 0，取决于词 i,j 是否允许．现在假定，性质2.1.1 对 $k-1$ 及所有 i,j 成立．根据矩阵的乘法，有：

$$\begin{aligned}(A^k)_{ij}&=\sum_{s_1,s_2,\cdots,s_{k-1}}a_{is_1}a_{s_1s_2}\cdots a_{s_{k-1}j}\\&=\sum_{s_{k-1}}\Big(\sum_{s_1,s_2,\cdots,s_{k-2}}a_{is_1}a_{s_1s_2}\cdots a_{s_{k-2}s_{k-1}}\Big)a_{s_{k-1}j}\\&=\sum_{s_{k-1}}N(k-1,i,s_{k-1})a_{s_{k-1}j}\\&=N(k,i,j).\end{aligned}$$

最后一步成立是因为：如果 $a_{s_{k-1}j}=0$，则相应的由 i 至 s_{k-1} 的词不能延长为由 i 至 j 的允许词，从而对于 $N(i,j)$ 没有贡献．如果 $a_{s_{k-1}j}=1$，则每一个由 i 至 s_{k-1} 的允许词可以延长为 i 至 j 的允许词，并且延长词互不相同．

性质2.1.2　单边位移 $T:\Sigma_A^+\to\Sigma_A^+$ 的 k 周期点的个数等于矩阵 A^k 的迹．

证明　k - 周期点形如 $is_1\cdots s_{k-1}is_1\cdots s_{k-1}i\cdots$，故可以将该点与词 $is_1\cdots s_{k-1}i$ 对应起来．因此 k 周期点的个数为：

$$\sum_i N(k,i,i)=\sum_i(A^k)_{ii}=\mathrm{tr}(A^k).$$

现在可以定义单边子位移 $T:\Sigma_A^+\to\Sigma_A^+$ 的 Zeta 函数：

$$\zeta_T(t)=\exp\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\,\mathrm{tr}(tA^k)\Big].$$

性质2.1.3　$\zeta_T(t)=[\det(I-tA)]^{-1}$.

证明　这只需通过一个简单计算：

$$\begin{aligned}\zeta_T(t)&=\exp\Big[\mathrm{tr}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}t^kA^k\Big]\\&=\exp[\mathrm{tr}(-\log(I-tA))]\\&=\det[\exp(\log(I-tA)^{-1})]\\&=[\det(I-tA)]^{-1}.\end{aligned}$$

由性质2.1.2知，迹 $\mathrm{tr}(A^k)$ 为 k－周期点的个数，k－周期点为拓扑共轭不变量，故 Zeta 函数也为拓扑共轭不变量．注意，$\zeta_T(t)$ 为有理函数，由有限个系数确定．

性质2.1.4 单边子位移 $T:\Sigma_A^+\to\Sigma_A^+$ 的拓扑熵等于 $\log\rho(A)$，其中 $\rho(A)$ 为矩阵 A 的谱半径．

证明 根据定理2.1.9，考虑 Σ_A^+ 中的柱集，$I(w_0,w_1,\cdots,w_n)\bigcap\Sigma_A^+$，它与允许词 $w_0w_1\cdots w_n$ 相对应，所有这些柱集（n 固定），构成 Σ_A^+ 的开覆盖 $\{\alpha_n\}$．此开覆盖 $\{\alpha_n\}$ 显然满足定理2.1.9的条件．为计算 $h(T,\alpha_n)$，我们考察加细覆盖 $\bigvee\limits_{i=0}^{k}T^{-i}\alpha_n$．容易验证，这不过是 $\{\alpha_{n+k}\}$，故：

$$h(T,\alpha_n)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log N(\alpha_{n+k})$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\|A^{n+k}\|_1.$$

第二个等式由性质2.1.1得出，其中 $\|B\|_1$ 表示矩阵 B 的元素 b_{ij} 的绝对值之和 $\sum\limits_{ij}|b_{ij}|$．因此 $h(T,\alpha_n)=\log\rho(A)$．此值与 n 无关，依定理2.1.9，有：

$$h(T)=\log\rho(A).$$

通常我们要求矩阵 A 满足：

(1) $a_{ij}=0$ 或 1，$\forall i,j$；

(2) $\sum\limits_{j}a_{ij}\geqslant 1$，$\forall i$；

(3) $\sum\limits_{i}a_{ij}\geqslant 1$，$\forall j$．

称 A 为转移矩阵．注意，这与随机转移矩阵不同，这里的转移矩阵是与所谓的有向图相对应的．如果上述(2)、(3)中两式都为等式，则称 A 为置换矩阵．但由置换矩阵 A 定义知，单边符号空间仅由有限个点构成，相应的动力系统是平凡的．因此，我们总是假定 A 不是置换矩阵．容易验证，A 不是置换矩阵当且仅当存在某个 i_0，使得 $\sum\limits_{j}a_{i_0j}\geqslant 2$．

2.2 测度的维数理论

在本节中，我们首先证明两个定理：测度正则—奇异分解的 Kahane 定理

和 Hausdorff 维数等于容量维数的 Kaufman 定理．这些结果建立在位势理论基础上．基于上述结果，我们建立测度的维数理论．一类重要的测度是单维数测度，我们将证明遍历测度是单维数测度．本节与 2.4 节测度的重分形有着紧密的联系．

2.2.1　度量空间上的位势

1．测度的正则—奇异分解

设 X 为局部紧且 σ－紧的拓扑空间．映射 $\Phi: X \times X \to \mathbf{R}^+$ 称为 X 上的一个位势核，如果它是下半连续的且具有对称性，即 $\Phi(x,y) = \Phi(y,x)$．

设 μ 为定义在 X 上的一个正测度，记为 $\mu \in M^+(X)$．我们定义 μ（关于 Φ）的位势为下述单重积分：

$$U^\mu(x) = \int_X \Phi(x,y)\mathrm{d}\mu(y),$$

定义 μ（关于 Φ）的能量为下述二重积分：

$$I^\mu = \int_X\int_X \Phi(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y).$$

我们还需要两个测度 $\mu,\nu \in M^+(X)$（关于 Φ）的相关能量，其定义为：

$$\begin{aligned} I(\mu,\nu) &= \iint \Phi(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y) \\ &= \iint \Phi(x,y)\mathrm{d}\nu(x)\mathrm{d}\mu(y), \end{aligned}$$

第二个等式成立是因为 Φ 具有对称性．

给定紧集 $K \subset X$，记：

$$I(K) = \inf_{\mu \in M_1^+(K)} I^\mu .$$

这里 $M_1^+(K)$ 表示由所有支撑于 K 上的概率测度构成的集合．紧集 K（关于 Φ）的能量定义为：

$$\mathrm{Cap}K = (I(K))^{-1}.$$

对于任给的集合 $E \subset X$（不一定为紧集），我们定义它（关于 Φ）的能量为：

$$\mathrm{Cap}E = \sup_{K(\subset E)\text{紧集}} \mathrm{Cap}K.$$

必要情况下，我们将把 $U^\mu, I^\mu, \mathrm{Cap}$ 写成 $U^\mu_\Phi, I^K_\Phi, \mathrm{Cap}_\Phi$．这样，可以明确位势、

能量和容量与位势核的关系．

在位势理论中，极大原理起着重要的作用．下面列举一些常用的极大原理．在下文中 $M_c^+(X)$ 表示具有紧支集的测度的集合，S_μ 表示测度 μ 的支集．我们称位势核 Φ 满足：

(1) Frostman 极大原理．如果对任何 $\mu \in M_c^+(X)$，有：

$$\sup_{x\in X} U^\mu(x) \leqslant \sup_{x\in S_\mu} U^\mu(x).$$

(2) λ - 扩张原理($\lambda \geqslant 1$)．如果对任何 $\mu \in M_c^+(X)$，有：

$$\sup_{x\in X} U^\mu(x) \leqslant \lambda \sup_{x\in S_\mu} U^\mu(x).$$

(3) 上有界极大原理．如果对任何 $\mu \in M_c^+(X)$，有：

$$\sup_{x\in S_\mu} U^\mu(x) < +\infty \text{ 蕴含} \sup_{x\in X} U^\mu(x) < +\infty,$$

(4) 连续性原理．如果对任何 $\mu \in M_c^+(X)$，有：

$$U^\mu(x) \text{ 在 } S_\mu \text{ 上连续蕴含 } U^\mu(x) \text{ 在 } X \text{ 上连续}.$$

如果 Φ 限制在任何一个紧子空间上满足某个极大原理，则称 Φ 满足相应的局部极大原理．在所有这些极大原理中，局部上有界极大原理是最弱的一个．即使在这个最弱的极大原理满足的情况下，也可以得到下述 Kahane 分解定理．

如果测度 μ 可写成和式 $\mu = \sum_m \mu_m$(级数在全变差范数下收敛)，其中 μ_m 具有有限 Φ - 能量，则称 μ 是 Φ - 正则的．如果测度 μ 集中分布在某个 Φ - 能量为零的 Borel 集合上，则称 μ 为 Φ - 奇异的．

定理2.2.1[6] 设 X 为一个局部紧且 σ - 紧的 Hausdorff 空间，Φ 为 X 上某个局部上有界位势核，那么，任何测度 $\mu \in M(X)$ 均可唯一地分解成：

$$\mu = \mu_1 + \mu_2,$$

其中 μ_1 是 Φ - 正则的，而 μ_2 是 Φ - 奇异的．

证明 必要性．假定分解不唯一，即：

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 = \mu'_1 + \mu'_2, \qquad \mu_2 \neq \mu'_2,$$

因 $\mu_2 - \mu'_2 \neq 0$ 且 $\mu_2 - \mu'_2$ 为 Φ - 奇异，故存在某个 Φ - 能量为零的紧集 K，使得 $(\mu_2 - \mu'_2)|_K \neq 0$．从而可断言，两测度 μ_1 和 μ'_1 之一是非零的．假定 $\mu_1(K) > 0$，因 μ_1 是 Φ - 正则的，故 $\mathrm{Cap}_\Phi K > 0$，矛盾．

充分性．因空间 X 是 σ - 紧的，有了唯一性之后，我们可以假定空间 X 本

身是紧的，并假定位势核 Φ 满足上有界原理．现构造：

$$S = S(\Phi, \mu) = \{x \in X : U_{\Phi}^{\mu}(x) = \infty\}.$$

可以证明 $\mathrm{Cap}_{\Phi} S = 0$. 于是可取：

$$\mu_1 = \mu 1_{S^c},$$

$$\mu_2 = \mu 1_{S}.$$

由 $\mathrm{Cap}_{\Phi} S = 0$，得到 μ_2 是 Φ − 奇异的，注意到：

$$U_{\Phi}^{\mu_1}(x) \leqslant U_{\Phi}^{\mu}(x) < \infty, \qquad \forall x \in S^c.$$

由此可见，μ_1 可以写成 Φ − 能量有限的测度之和：

$$\mu_1 = \sum \nu_n,$$

其中，

$$\nu_n = \mu_1 1_{E_n},$$

$$E_n = \{x \in S^c : n \leqslant U_{\Phi}^{\mu}(x) < n + 1\}.$$

2.　Riesz 位势和容量维数

设 X 为一个局部紧且 σ − 紧的度量空间，设其度量为 d，再设 $\varphi : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ 为一个缓慢递减函数，即 φ 是单调递减，且满足：

$$\varphi(\delta t) \leqslant A\varphi(t), \qquad \forall t > 0,$$

其中 $0 < \delta < 1$ 和 $A \geqslant 1$ 为常数．我们可以定义这样一个位势核：

$$\Phi(x, y) = \varphi(d(x, y)),$$

并称 Φ 为 φ − 核．

一个重要的特殊情形是 $\varphi(t) = t^{-\alpha}(\alpha > 0)$. 相应地称 φ − 核为 α − Riesz 核，或 α 阶 Riesz 核．一个有用的事实是 α − Riesz 核满足 λ − 扩张极大原理．从而可以将测度依 α − Riesz 核进行分解，得到所谓的 α − 正则测度和 α − 奇异测度．

定理2.2.2[7]　设(X, d)为局部紧且 σ − 紧的度量空间，则任何测度 $\mu \in M(X)$ 可以唯一地分解成：

$$\mu = \mu_1 + \mu_2,$$

其中 μ_1 是 α − 正则测度，μ_2 是 α − 奇异的．

证明　只要证明 α − Riesz 核满足 λ − 扩张极大原理（λ 待定）．这基于一个简单事实：给定一个球，球外的一点到球心的距离要比该点与球面上任

何一点的距离的一半要远．准确地说：

$$d(y,z) \geqslant d(x,z) \text{ 蕴含 } d(y,z) \geqslant \frac{1}{2} d(y,x),$$

其中 z 表示球心，x 表示球面上一点，y 表示球外一点．现设 $\mu \in M_c^1(X)$ 且有支集 S_μ，假定：

$$\sup_{x \in S_\mu} \int \Phi(x,y) \mathrm{d}\mu(y) < +\infty.$$

又设 $z \in X \setminus S_\mu$．根据 S_μ 的紧性和 d 的连续性，存在某点 $x \in S_\mu$，使得：

$$d(x,z) - \inf_{y \in S_\mu} d(y,z) > 0.$$

根据上面指出的简单事实，我们有：

$$d(y,z) \geqslant \frac{1}{2} d(x,y), \qquad \forall\, y \in S_\mu.$$

另外，根据 φ 为缓慢递减的事实，任给 $\Delta > 0$，存在常数 $C(\Delta)$，使得：

$$\varphi(\Delta t) \leqslant A^{C(\Delta)} \varphi(t),$$

故：

$$\Phi(z,y) \leqslant A^{C(2^{-1})} \Phi(x,y).$$

从而，

$$\begin{aligned} U^\mu(z) &= \int_{S_\mu} \Phi(z,y) \mathrm{d}\mu(y) \\ &\leqslant A^{C(2^{-1})} \int_{S_\mu} \Phi(x,y) \mathrm{d}\mu(y). \end{aligned}$$

由此，可取 $\lambda = A^{C(2^{-1})}$．

现在，我们可以来定义集合的容量维数．集合 $E(\subset X)$ 的容量维数定义为：

$$\begin{aligned} \dim_c E &= \sup\{\alpha \geqslant 0 : \mathrm{Cap}_\alpha E > 0\} \\ &= \inf\{\alpha \geqslant 0 : \mathrm{Cap}_\alpha E = 0\}. \end{aligned}$$

后面，我们将证明集合的容量维数与2.1 节中定义的 Hausdorff 维数相等．

3. 相关能量的极大极小定理

该定理是为下一节的 Kaufman 定理做准备的，它的证明将依赖于 Von Neumann 极大极小定理．

定理2.2.3 设 Φ 为紧空间 X 上的一个位势核，我们有下述等式：

$$\sup_{\mu\in M_1^+(X)}\min_{\nu\in M_1^+(X)} I(\mu,\nu) = \min_{\nu\in M_1^+(X)}\sup_{\mu\in M_1^+(X)} I(\mu,\nu).$$

证明 定理中的两个量可以不用相关能量而仅用能量来表示，即：

$$\sup_{\mu\in M_1^+(X)}\inf_{y\in X} U^\mu(y) = \sup_{\mu\in M_1^+(X)}\inf_{\nu\in M_1^+(X)} I(\mu,\nu),$$

$$\inf_{\mu\in M_1^+(X)}\sup_{x\in X} U^\mu(x) = \inf_{\nu\in M_1^+(X)}\sup_{\mu\in M_1^+(X)} I(\mu,\nu).$$

这两个等式成立是因为：

$$U^\mu(y) = I(\mu,\delta_y),$$

$$p \equiv \inf_{y\in X} U^\mu(y) \leqslant I(\mu,\nu) \leqslant \sup_{x\in X} U^\mu(x) \equiv q,$$

分别以 p 和 q 来表示这两个量．显然 $p \leqslant q$，故只需证明 $q \leqslant p$.

首先，我们在 Φ 连续的假定下给出证明．

任给 $\varepsilon > 0$，由 X 的紧性及 Φ 的连续性，可以找到 X 的一个分划 $\{E_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 满足：

$$|\Phi(x,y) - \Phi(x',y')| \leqslant \varepsilon, \qquad \forall (x,y),(x',y') \in E_j \times E_k.$$

对任何 $1 \leqslant j \leqslant n$ 和 $1 \leqslant k \leqslant n$，任选一点 $(x_j, y_k) \in E_j \times E_k$，则：

$$\begin{aligned} I(\mu,\nu) &= \sum_{j,k}\int_{E_j\times E_k} \Phi(x,y)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu \\ &= \sum_{j,k} \Phi(x_j,y_k)\mu(E_j)\nu(E_k) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

记 c 为由 Von Neumann 极大极小定理所确定的矩阵 $(\Phi(x_j,y_k))$ 的最佳值，那么 $p = c + O(\varepsilon)$ 且 $q = c + O(\varepsilon)$．因此 $p - q = O(\varepsilon)$．由 ε 的任意性得到 $p = q$．记 q_Φ 为 p 与 q 的公共值，由 p 和 q 的上述第一个表达式，以及 $M_1^+(X)$ 的紧性和 Φ 的连续性，可以得到满足下式的测度 μ_Φ 和 ν_Φ：

$$\min_{y\in X} U^{\mu_\Phi}(y) = q_\Phi = \max_{x\in X} U^{\nu_\Phi}(x).$$

还有：

$$q_\Phi = I_\Phi(\mu_\Phi, \nu_\Phi).$$

现在可以放宽对 Φ 的连续性要求．如果 Φ 只是下半连续，可以假定存在一列连续核 $\Phi_n \to \Phi$．记：

$$q_n = q_{\Phi_n},$$

$$\mu_n = \mu_{\Phi_n},$$

$$\nu_n = \nu_{\Phi_n}.$$

设 n 固定而且 $m \geqslant n$，则：

$$U_{\Phi_n}^{\nu_m}(x) \leqslant U_{\Phi_m}^{\nu_m}(x) \leqslant q_m.$$

由 $M_1^+(X)$ 的紧性，可以假定 ν_n 收敛于某个测度 ν_0，注意到 $I_\Phi(\mu,\nu)$ 的连续性，可得：

$$\begin{aligned} I_{\Phi_n}(\mu,\nu_0) &\leqslant \overline{\lim_{m\to\infty}}\ I_{\Phi_n}(\mu,\nu_m) \\ &\leqslant \overline{\lim_{m\to\infty}}\ I_{\Phi_m}(\mu,\nu_m) \\ &\leqslant \sup_m q_m. \end{aligned}$$

令 $n \to +\infty$，$I(\mu,\nu_0) \leqslant \sup_m q_m$，故：

$$\begin{aligned} \inf_{\nu\in M_1^+(X)}\ \sup_{\mu\in M_1^+(X)} I(\mu,\nu) &\leqslant \sup_{\mu\in M_1^+(X)} I(\mu,\nu_0) \\ &\leqslant \sup_m q_m. \end{aligned}$$

另一方面，我们有：

$$q_m - I_{\Phi_m}(\mu_m,\nu_m) - \sup_{\mu\in M_1^+(X)}\ \inf_{\nu\in M_1^+(X)} I_{\Phi_m}(\mu,\nu).$$

由于 $\Phi_m \leqslant \Phi$，上述等式蕴含 $q \leqslant p$.

4. $\dim_H = \dim_C$

我们熟知，任何度量空间上的容量维数总是小于或等于 Hausdorff 维数．本节将证明逆向不等式在可分完备度量空间上成立．该结果是由 R. Kaufman 获得的.

定理2.2.4 (Kaufman定理) 设(X,d)为一可分完备度量空间．对于任何 Borel 集 $E\subset X$，我们有等式：

$$\dim_H E = \dim_C E.$$

在欧氏空间中，这是熟知的 Frostman 定理，该定理的关键是下述 Frostman 引理：

设 $K(\subset \mathbf{R}^n)$ 为紧集，为使 $H_\varphi(K)>0$，$H_\varphi(K)$ 为 φ − Hausdorff 测度，当且仅当存在一个支撑于 K 上的正测度，使得 $\mu(B(x,r))\leqslant\varphi(r)$.

我们将证明一个类似于 Frostman 引理的 Kaufman 引理．为最终证明 Kaufman 定理，不仅需要极小定理，而且需要一个深刻的R. O. Davies 的结果．

定理2.2.5（Kaufman 引理） 设 $K(\subset X)$ 为一紧集，$\varphi:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 为单调上升的连续函数，且满足 $\varphi(0)=0,\varphi(2t)=O(\varphi(t))$. 如果 $H_\varphi(K)>0$，则对任何与 φ 性质相同且满足

$$\int_0^1 \frac{\eta(t)}{t}\mathrm{d}t<+\infty$$

的函数 η，存在概率测度 $\mu\in M_1^+(K)$ 和常数 $C>0$，使得：

$$\mu(B(x,r))\leqslant C\frac{\varphi(r)}{\eta(r)}.$$

特别地，如果 $H_\alpha(K)>0$，则对任何 $\epsilon>0$，存在 $\mu\subset M_1^+(K)$，使得：

$$\mu(B(x,r))=O(r^{\alpha-\epsilon}).$$

定理2.2.6（Davies 定理） 设 (X,d) 为可分完备度量空间，$\varphi:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 为单调连续函数，且满足 $\varphi(0)=0,\varphi(2t)=O(\varphi(t))$. 如果 Borel 集 $E(\subset X)$ 的 Hausdorff 测度 $H_\varphi(E)>0$，则存在紧集 $K\subset E$，使得 $H_\varphi(K)>0$.

为证明定理2.2.6，我们先证明两个辅助引理.

引理2.2.1 设 $\varphi:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 和 $\eta:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 如定理2.2.5（Kaufman 引理）中所述. 考虑 X 上的位势核 $\Phi(x,y)=1/\varphi(d(x,y))$. 假定 X 有界，则对任何测度 $\mu\in M_1^+(X)$，我们有：

$$\sup_{r>0}\frac{\mu(B(x,r))}{\varphi(r)}\leqslant U_\Phi^\mu(x)\leqslant C\sup_{r>0}\frac{\mu(B(x,r))}{\varphi(r)\eta(r)},\qquad(2.2.1)$$

其中常数 C 仅依赖于 φ,η,μ 和 X 的直径.

证明 可设 $\mu(\{x\})=0,x\in X$. 对于任意 $r>0$，有：

$$\begin{aligned}U_\Phi^\mu(x)&\geqslant\int_{B(x,r)}\frac{\mathrm{d}\mu(y)}{\varphi(d(x,y))}\\&\geqslant\frac{\mu(B(x,r))}{\varphi(r)}.\end{aligned}$$

于是，(2.2.1) 式中的第一个不等式成立.

为证(2.2.1) 式的第二个不等式，不妨设 X 的直径为 1，则：

$$\begin{aligned}U_\Phi^\mu(x)&\leqslant\sum_{n=0}^\infty\int_{\{2^{-n-1}<d(x,y)\leqslant 2^{-n}\}}\frac{\mathrm{d}\mu(y)}{\varphi(d(x,y))}\\&\leqslant\sum_{n=0}^\infty\frac{\mu(B(x,2^{-n}))}{\varphi(2^{-n-1})}\\&\leqslant C_\varphi\sup_{r>0}\frac{\mu(B(x,r))}{\varphi(r)\eta(r)}\sum_{n=0}^\infty\eta(2^{-n})\end{aligned}$$

$$\leqslant C_\varphi \frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{\eta(t)}{t}\mathrm{d}t \sup_{r>0}\frac{\mu(B(x,r))}{\varphi(r)\eta(r)}.$$

引理2.2.2 记号同引理2.2.1，如果有：

$$S(\mu,\Phi) = \{x \in X : U_\Phi^\mu(x) = +\infty\}$$

则 $H_{\varphi\eta}(S(\mu,\Phi)) = 0$

证明 设 $\Delta > 0$. 假定 $x \in S(\mu,\Phi)$，由引理2.2.1知，存在序列 $r_n = r_n(x)$，使得：

$$\mu(B(x,r_n)) \geqslant \Delta_n\varphi(r_n)\eta(r_n).$$

显然 $r_n \to 0$. 根据 Vitali 覆盖引理，对任给 $\delta > 0$，可以从 Vitali 覆盖 $\{B(x,r_n(x)) : x \in S(\mu,\Phi), n \geqslant 1\}$ 中取出一列球 $B(x_k,r_k)$，它们互不相交，且满足 $3r_k \leqslant \delta$，以及：

$$S(\mu,\Phi) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k,3r_k).$$

然而，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(3r_k)\eta(3r_k) \leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(r_k)\eta(r_k)$$

$$\leqslant \frac{C}{\Delta}\sum_{k=1}^{\infty}\mu(B(x_k,r_k))$$

$$\leqslant \frac{C}{\Delta}.$$

从而得 $H_{\varphi\eta}(S(\mu,\Phi)) \leqslant C/\Delta$. 令 $\Delta \to \infty$，则：Q

$$H_{\varphi\eta}(S(\mu,\Phi)) = 0.$$

定理2.2.5 的证明如下：

设 $K \subset X$ 为紧集，且满足 $H_\varphi(K) > 0$. 根据引理2.2.2，任给 $\mu \in M_1^+(K)$，$S(\mu,\Phi_{\varphi/\eta}) \neq K$. 从而有：

$$\inf_{x\in K} U_{\varphi/\eta}^\mu(x) < \infty, \quad \forall \mu \in M_1^+(K). \tag{2.2.2}$$

我们还可以证明如下进一步的结果：

$$\sup_{\mu\in M_1^+(K)} \inf_{x\in K} U_{\varphi/\eta}^\mu(x) < +\infty. \tag{2.2.2$'$}$$

事实上，如果不然，则存在一列概率测度 $\mu_n \in M_1^+(K)$，使得：

$$\inf_{x\in K} U_{\varphi/\eta}^{\mu_n}(x) \geqslant 2^n, \qquad n \to \infty.$$

令：

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\mu_n, \qquad \mu_n \in M_1^+(K),$$

则对任何 $x \in K$，我们有：

$$U_{\varphi/\eta}^{\mu}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} U_{\varphi/\eta}^{\mu_n}(x)$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot 2^n = \infty.$$

这与前面所述的事实相矛盾，故(2.2.2)式成立.

于是，根据相关能量的极大极小原理，存在某个概率测度 $\sigma \in M_1^+(K)$，使得 $I_{\varphi/\eta}^{\sigma} < \infty$. 由引理 2.2.1 即得所要证明的结果：

$$\sigma(B(x,r)) \leqslant C\frac{\varphi(r)}{\eta(r)}.$$

定理2.2.4 的证明如下：

设 $\alpha = \dim_C E$，$\beta = \dim_H E$. 任给 $\varepsilon > 0$，我们有 $\mathrm{Cap}_{\alpha-\varepsilon} E > 0$，从而存在某个紧集 $K \subset E$ 及其上某个测度 $\sigma \in M_1^+(K)$，使得 $I_{\alpha-\varepsilon}^{\sigma} < \infty$. 根据引理 2.2.1，我们有：

$$\sigma(B(x,r)) \leqslant C\, r^{\alpha-\varepsilon}, \qquad \forall\, x \in K.$$

依照 Billingsley 定理，有：

$$\beta \geqslant \dim_H K \geqslant \alpha - \varepsilon,$$

故得 $\beta \geqslant \alpha$.

为证反向不等式，只需证明：对每个 ε，$0 < \varepsilon < \beta$，有 $\mathrm{Cap}_{\beta-\varepsilon} > 0$.

依假设，有 $H_{\beta-\varepsilon}(K) > 0$. 于是，Davies 定理断言，存在紧集 $K \subset E$，使得我们依然有 $H_{\beta-\varepsilon/3}(K) > 0$. 现应用 Kaufman 引理，得知存在测度 $\mu \in M_1^+(K)$，使得：

$$\mu(B(x,r)) \leqslant C\, r^{\beta-\frac{2}{3}\varepsilon},$$

从而，由引理2.2.1 得：

$$\sup_{x \in K} U_{\beta-\varepsilon}^{\mu}(x) < \infty,$$

故有：

$$\mathrm{Cap}_{\beta-\varepsilon} E \geqslant \mathrm{Cap}_{\beta-\varepsilon} K > 0.$$

2.2.2　测度的维数

1.　定义及主要定理

设 X 为完备度量空间，对于其上的正测度 $\mu \in M^+(X)$，我们定义几种维数，并且将证明，其实只有两种不同的维数，分别称之为上维数和下维数．另外，通过考虑局部 Lipschitz 指数，可以给出计算上维数和下维数的公式．上维数和下维数相同的测度称为单维数测度．这是我们常常遇到的、具有较好性质的测度．

测度 μ 的支撑维数定义为：

$$\dim_p \mu = \inf\{\dim F : F \text{ 为 Borel 集}, \mu(F^c) = 0\}. \tag{2.2.3}$$

这一概念很自然，它刻画了支撑测度的“最小”Borel 集的大小（最小 Borel 集并不是唯一的）．

测度 μ 的能量维数定义为：

$$\dim_e \mu = \sup\left\{\alpha > 0 : \mu = \sum_i \mu_i, I_\alpha^{\mu_i} < \infty\right\}. \tag{2.2.4}$$

上述和式在全变差范数下收敛．

测度 μ 的上谱维数和下谱维数分别定义为：

$$\dim^* \mu = \inf\{\alpha \geqslant 0 : \mu(S(\mu,\alpha)^c) = 0\}, \tag{2.2.5}$$

$$\dim_* \mu = \sup\{\alpha \geqslant 0 : \mu(S'(\mu,\alpha)^c) = 0\}, \tag{2.2.6}$$

其中 $S(\mu,\alpha)$ 为对应于 Kahane 分解的奇异点集．

以 H_α 记 α 维 Hausdorff 测度．如果 $H_\alpha(F) = 0$ 蕴含 $\mu(F) = 0$，则称 μ 关于 H_α 绝对连续，记为 $\mu \ll H_\alpha$．如果存在 Borel 集 F，使得 $H_\alpha(F) = 0$ 而 $\mu(F^c) = 0$，则称 μ 关于 H_α 奇异，记为 $\mu \perp H_\alpha$．依照这两个概念，可以引入测度 μ 的连续性指标和奇异性指标：

测度 μ 的连续性指标和奇异性指标分别定义为：

$$\mathrm{Ind}_c \mu = \sup\{\alpha \geqslant 0 : \mu \ll H_\alpha\}, \tag{2.2.7}$$

$$\mathrm{Ind}_s \mu = \inf\{\alpha \geqslant 0 : \mu \perp H_\alpha\}. \tag{2.2.8}$$

下面我们先叙述几个定理，并把主要定理的证明放到 2 小节．

定理 2.2.7[8]　对于正测度 $\mu \in M^+(X)$，我们有：

$$\dim_* \mu = \dim_e \mu = \mathrm{Ind}_c \mu, \tag{2.2.9}$$

$$\dim^* \mu = \dim_p \mu = \mathrm{Ind}_s \mu. \tag{2.2.10}$$

$$\dim_* \mu = \dim^* \mu. \tag{2.2.11}$$

有了定理2.2.7，便可以简称$\dim^* \mu$为测度μ的上维数，$\dim_* \mu$为μ的下维数.

现在考虑如何计算上维数和下维数. 为此，定义测度μ在$x(\in X)$点处的(下)Lipschitz指数为：

$$\underline{D}(\mu, x) = \liminf_{r\to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r}, \tag{2.2.12}$$

其中$B(x,r)$表示中心为x且半径为r的球. 同样，可以定义(上)Lipschitz指数$\overline{D}(\mu,x)$. 如果$\underline{D}(\mu,x) = \overline{D}(\mu,x)$，其公共值记为$D(\mu,x)$. 这里，我们只需用到$\underline{D}(\mu,x)$.

定理2.2.8[8] 对于正测度$\mu \in M^+(X)$，我们有：

$$\dim_* \mu \geqslant \alpha \Leftrightarrow \underline{D}(\mu,x) \geqslant \alpha, \quad \mu - \text{几乎处处成立}, \tag{2.2.13}$$

$$\dim^* \mu \leqslant \alpha \Leftrightarrow \underline{D}(\mu,x) \leqslant \alpha, \quad \mu - \text{几乎处处成立}. \tag{2.2.14}$$

该定理可由下列公式表述，这些公式称为测度的维数公式.

$$\dim_* \mu = \sup\{\alpha \geqslant 0 : \underline{D}(\mu,x) \geqslant \alpha, \mu - \text{几乎处处成立}\}, \tag{2.2.15}$$

$$\dim^* \mu = \inf\{\alpha \geqslant 0 : \underline{D}(\mu,x) \leqslant \alpha, \mu - \text{几乎处处成立}\}. \tag{2.2.16}$$

换言之，$\dim_* \mu$与$\dim^* \mu$分别为Lipschitz指数$\underline{D}(\mu,x)$的本性上确界和下确界. 通常，$\dim_* \mu < \dim^* \mu$. 如果两者相等，则称测度μ为单维数测度. 此时，Lipschitz指数$\underline{D}(\mu,x)$为μ - 几乎处处常数.

为了更明确地刻画单维数测度，我们引入一类测度. 测度μ称为α - Lipschitz的，如果：

$$\mu(B) \leqslant C(\dim B)^{\alpha},$$

这里B为任意球，而C为不依赖于B的常数. 以Λ_α记所有α - Lipschitz测度的集合.

设$0 < \alpha < \infty$，测度μ称为α - 原子，如果对任意$\varepsilon > 0$，μ满足：

(1) $\mu < \Lambda_{\alpha-\varepsilon}$；

(2) $\nu \leqslant \mu, \nu \in \Lambda_{\alpha+\varepsilon}$蕴含$\nu = 0$.

可以写成一列α - 原子之和(依全变差范数收敛)的测度称为α - 维测度.

定理2.2.9[8] 对于正测度$\mu \in M^+(X)$，下列事实等价：

(i)μ 为 α − 维测度；

(ii)$\underline{D}(\mu,x)=\alpha$ 为 μ − 几乎处处成立；

(iii)$\mu \ll H_\beta$，且 $\mu \perp H_\beta, \forall \beta < \alpha$；

(iv) 存在 Borel 集 F，使得 $\mu(F^c)=0$ 而 $\dim F=\alpha$.

对于满足 $\dim E<\alpha$ 的 Borel 集 E，有 $\mu(E)=0$.

一个测度 μ 称为几乎 α − Lipschitz 的，记为 $\mu \in \Lambda_\alpha^*$，如果有紧集 K，使得：

$$1_K\mu \in \Lambda_\alpha, \qquad \mu(X\setminus K)<\varepsilon.$$

我们有如下事实：

$$I_\alpha^\mu < \infty \text{ 蕴含 } \mu \in \Lambda_\alpha^*. \tag{2.2.17}$$

$$\mu \in \Lambda_\alpha \text{ 蕴含 } I_{\alpha-\varepsilon}^\mu < \infty. \tag{2.2.18}$$

我们称测度 μ 为弱 α − 原子，如果它满足 α − 原子定义中的条件(2) 及条件 $I_{\alpha-\varepsilon}^\mu<\infty, \forall \epsilon>0$.

我们不难证明，测度 μ 为 α − 维的，当且仅当它可以写成一列弱 α − 原子之和．

2．　定理的证明

(1) 定理 2.2.7 的证明．首先注意到，存在 Borel 集 B，使得：

$$\mu(B^c)=0, \qquad \dim B=\dim_p\mu. \tag{2.2.19}$$

事实上，任给整数 $n\geqslant 1$，存在 Borel 集 B_n，使得：

$$\mu(B_n^c)=0, \qquad \dim_p\mu \leqslant \dim B_n \leqslant \dim_p\mu+\frac{1}{n},$$

故可取 B 为 $B_n(n\geqslant 1)$ 之交集．

为证(2.2.9) 式，我们先证明下列不等式：

$$\dim_*\mu \leqslant \dim_e\mu \leqslant \mathrm{Ind}_c\mu \leqslant \dim^*\mu. \tag{2.2.20}$$

令 $\alpha_1=\dim_*\mu$，$\alpha_2=\dim_e\mu$，$\alpha_3=\mathrm{Ind}_c\mu$．由谱维数的定义，任给 $\epsilon>0$，有：

$$U_{\alpha_1-\epsilon}^\mu(t)<\infty, \qquad \mu \text{ 几乎处处成立}.$$

令：

$$K_n=\{t: n\leqslant U_{\alpha_1-\epsilon}^\mu(t)<n+1\}, \qquad n\geqslant 0,$$

则:

$$\mu = \sum_n 1_{K_n}\mu, \quad I_{\alpha_1}^{1_{K_n}\mu_\varepsilon} < +\infty,$$

从而 $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$.注意下列事实:

$$I_\alpha^\mu < \infty \text{ 蕴含 } \mu \ll \mathrm{Cap}_\alpha.$$

这是因为,如果存在 Borel 集 F,使得 $\mathrm{Cap}_\alpha F = 0$ 而 $\mu(F) > 0$,则存在紧集 $K \subset F$,使得 $\mathrm{Cap}_\alpha K = 0$ 而 $\mu(K) > 0$.这与事实 $I_\alpha^\mu < \infty$ 相矛盾.依上述事实,显然 $\alpha_2 \leqslant \alpha_3$.现考虑 $F = S(\mu, \alpha_1 + \varepsilon)$,其中 $\varepsilon > 0$.我们有 $\mu(F) > 0$,且 $\mathrm{Cap}_{\alpha_1+\varepsilon} F = 0$,从而 $\mu \ll \mathrm{Cap}_{\alpha_1+\varepsilon}$ 不成立,故 $\alpha_3 \leqslant \alpha_1$.

为证(2.2.10)式,我们将证明下列不等式:

$$\dim^* \mu \leqslant \dim_p \mu \leqslant \mathrm{Ind}_s \mu \leqslant \dim^* \mu.$$

令 $\beta_1 = \dim^* \mu, \beta_2 = \dim_p \mu, \beta_3 = \mathrm{Ind}_s \mu$.事实上,由假设存在Borel集 B,使得 $\mu(B^c) = 0$,而 $\dim B = \beta_2$,因此,为使 $\beta_2 \geqslant \beta_1$,只需证明:

$$\dim B \geqslant \beta_1 - \varepsilon, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

然而,由 β_1 的定义,如果取 $A = S(\mu, \beta_1 - \varepsilon)^c$,则:

$$\mu(A) > 0, \qquad U_{\beta_1-\varepsilon}^\mu(t) < \infty, \qquad \forall t \in A.$$

特别地,

$$\mu(B \cap A) > 0, \qquad U_{\beta_1-\varepsilon}^\mu(t) < \infty, \qquad \forall t \in B \cap A.$$

由此可以导出,存在紧集 $K \subset B \cap A$ 和常数 $M > 0$,使得:

$$\mu(K) > 0, U_{\beta_1-\varepsilon}^\mu(t) \leqslant M, \qquad \forall t \in K.$$

因此,$\mathrm{Cap}_{\beta_1-\varepsilon} K > 0$,故 $\dim B \geqslant \dim K \geqslant \beta_1 - \varepsilon$.对于任何 $\varepsilon > 0$,存在 Borel 集 F,使得 $H_{\beta_3-\varepsilon}(F) = 0$,而 $\mu(F^c) = 0$,故 $\beta_2 \leqslant \dim F \leqslant \beta_3 + \varepsilon$,此即(2.2.10)式.如果考虑 $F = S(\mu, \beta_1 + \varepsilon)$,则:

$$\mathrm{Cap}_{\beta_1+\varepsilon} F = 0, \qquad \mu(F^c) = 0,$$

故 $\beta_3 \leqslant \beta_1 + \varepsilon$.(2.2.11)式是显然的.

(2) 定理2.2.8 的证明.任给 $0 < \varepsilon < \alpha$,我们有:

$$\{x : \underline{D}(\mu, x) \geqslant \alpha\} \subset \bigcup_{k=1}^\infty E_k,$$

其中,

$$E_k = \left\{ x : \mu(B(x,r)) \leqslant r^{\alpha - \epsilon}, \forall r \leqslant \frac{1}{k} \right\},$$

因此，如果 $\underline{D}(\mu, x) \geqslant \alpha$ 为 μ － 几乎处处成立，则 μ 可以写成一列 $(\alpha - \epsilon)$ 能量有限的测度之和，故 $\dim_* \mu \geqslant \alpha$.

为证明逆命题，注意到对任何 $\beta_1 < \alpha \leqslant \dim_* \mu$,

$$U^{\mu}_{\beta}(x) < \infty, \qquad \mu \quad 几乎处处成立,$$

从而 $\underline{D}(\mu, x) \geqslant \beta$ 为 μ － 几乎处处成立. 于是，我们证明了定理2.2.8 中的第一个等价关系(2.2.13).

现在设 $D(\mu, x) \leqslant \alpha$ 为 μ － 几乎处处成立，我们断言 $\dim^* \mu \leqslant \alpha$，即任给 $\epsilon > 0$,

$$U^{\mu}_{\alpha+\epsilon}(x) = \infty, \qquad \mu - 几乎处处成立.$$

如果不然，则存在紧集 K，使得 $\mu(K) > 0$，而 $U^{\mu}_{\alpha+\epsilon}(x) < \infty$, $\forall x \in K$，从而,

$$D(\mu, x) \geqslant \alpha + \epsilon, \qquad \forall x \in K.$$

这与假设相矛盾.

反之，如果 $D(\mu, x) \leqslant \alpha$ 不是 μ － 几乎处处成立，则存在 $\delta > 0$ 与集合 F，使得：

$$\mu(F) > 0, \dim F \leqslant \dim^* \mu, D(\mu, x) \geqslant \alpha + \delta, \qquad \forall x \in F.$$

依据 Billingsley 定理，$\dim F \geqslant \alpha + \delta$，从而 $\dim^* \mu \geqslant \alpha + \delta$. 这与假设 $\dim^* \mu \leqslant \alpha$ 相矛盾.

(3) 定理2.2.9 的证明. 为证明定理2.2.9，先引入测度的能量指标的概念，并证明一个准则.

测度 μ 的能量指标定义为：

$$e(\mu) = \sup\{\alpha \geqslant 0 : I^{\mu}_{\alpha} < +\infty\}.$$

我们有如下准则：

准则2.2.1　非零测度 μ 为弱 α － 原子，当且仅当：

$$\dim^* \mu = e(\mu) = \alpha. \tag{2.2.21}$$

证明　必要性. 假定 μ 为弱 α － 原子，只需证明：

$$\alpha \leqslant e(\mu), \tag{2.2.22}$$

$$\dim^* \mu \leqslant \alpha \tag{2.2.23}$$

不等式(2.2.22) 由定义即得. 为证不等式(2.2.23)，只需证明：

$$U^{\mu}_{\alpha+\epsilon}(t) = \infty, \quad \mu - \text{几乎处处成立}, \forall \epsilon > 0.$$

如若不然,则存在紧集 K 和常数 $M > 0$,使得:

$$\mu(K) > 0, \quad U^{\mu}_{\alpha+\epsilon}(t) < M, \quad \forall t \in K.$$

于是,$I^{1_K\mu}_{\alpha+\epsilon} < +\infty$. 这一事实蕴含 $1_K\mu \in \Lambda^*_{\alpha+\epsilon}$. 从而存在另一较小的紧集 $K_0 \subset K$,使得:

$$\mu(K_0) > 0, \quad 1_{K_0}\mu \in \Lambda_{\alpha+\frac{\epsilon}{2}}.$$

由于 μ 为弱 α - 原子,上述两事实不相容,故(2.2.23) 式成立.

充分性. 假定(2.2.21) 式成立. 显然 $I^{\mu}_{\alpha-\epsilon} < +\infty, \forall \epsilon > 0$. 现假设有非零测度 ν,满足条件 $\nu \leqslant \mu$ 及 $\nu \in \Lambda_{\alpha+\epsilon}$. 取一个 Borel 集 B,使得 $\mu(B^c) = 0$, $\dim B = \dim^*\mu$,从而可以找到满足 $\nu(K) > 0$ 的紧集 $K \subset B$. 因此,$\dim B \geqslant \dim K \geqslant \alpha + \epsilon$,这与 $\dim^*\mu - \alpha$ 相矛盾. 准则得证.

由定理2.2.7 可知,定理2.2.9 中(ii)(iii),(iv) 是等价的. 下面证明 μ 为 α - 维测度,当且仅当(iv) 成立.

假定 μ 为 α 维测度,依 α 维测度的定义及前面所证明的弱 α - 原子判别准则,可以知道 $\dim_p\mu = \alpha$.

(iv) 中的另一事实,可采用反证法证明. 假定存在 Borel 集,使得 $\dim B < \alpha$,而 $\mu(B) > 0$. 任给 $\epsilon > 0$,我们有分解:

$$\mu = \sum \mu_i,$$

其中 $\mu_i \in \Lambda^{\alpha-\epsilon}$. 因此,存在某个测度 μ_i,使得 $\mu_i(B) > 0$,从而存在某个紧集 $K \subset B$,使得 $\mu_i(K) > 0$. 于是,$\dim B \geqslant \dim K \geqslant \alpha - \epsilon$. 这与 $\dim B < \alpha$ 相矛盾.

假定(iv) 成立,固定 $n \geqslant 1$,对测度 μ 进行 $\alpha \quad \alpha/n$ 阶的 Kahane 分解:

$$\mu = 1_{A_n}\mu + 1_{B_n}\mu,$$

其中 A_n 和 B_n 满足:

$$\mathrm{Cap}_{\alpha-\frac{\alpha}{n}} B_n = 0, \quad U^{\mu}_{\alpha \ \frac{\alpha}{n}}(t) < \infty, \quad \forall t \in A_n.$$

显然,$\dim B_n \leqslant \alpha - \frac{\alpha}{n} < \alpha$. 故 $\mu(B_n) = 0$. 令 $X_n = U^{\mu}_{\alpha \ \frac{\alpha}{n}}$,视 X_n 为概率空间 (X,μ) 上的随机变量(假定 $\mu(X) = 1$). 我们已经证明,X_n 几乎处处有限. 因此存在常数 M_n,使得:

$$\mu(X_n \geqslant M_n) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

依 Borel - Cantelli 引理，我们有：

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}\{X_m < M_m\}\right) = 1.$$

现在选取：

$$C_1 = \bigcap_{m=1}^{\infty}\{X_m < M_m\},$$

$$C_n = \bigcap_{m=n}^{\infty}\{X_m < M_m\} \setminus C_{n-1}, \qquad n \geqslant 2,$$

则 $\{C_n\}$ 构成概率空间 X 的一个可数分划．于是，可以将 μ 写成：

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{C_n}\mu.$$

如果 $m \geqslant n$，则 $\mu_n = 1_{C_n}\mu$ 满足：

$$\begin{aligned} I_{\alpha}^{\mu_n}\frac{\alpha}{m} &= \int_X U_{\alpha}^{\mu_n}\frac{\alpha}{m}\,\mathrm{d}\mu_n \\ &\leqslant \int_X X_m\,\mathrm{d}\mu_n \\ &= \int_{C_n} X_m\,\mathrm{d}\mu \leqslant M_m. \end{aligned}$$

这意味着，每一个非零测度 μ_n 都是弱 α - 原子，故 μ 是 α - 维的．

3． 遍历测度的维数

我们考虑两种遍历性，一种来自经典的遍历理论，在前一节已经讨论过；另一种来自调和分析[9,10]．我们将证明遍历测度是单维数测度．

设 X 为完备度量空间，(X, A, μ) 为概率空间，$T: X \to X$ 为保测变换，如果对任何 $E \in A$，$\dim E = \dim T^{-1}E$，则称 Hausdorff 维数是 T - 不变的．

定理2.2.10 假定 Hausdorff 维数为 T - 不变的．每一个 T - 不变的遍历测度是单维数测度．

证明 假定 $\mu(E) > 0$．令：

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}E.$$

依遍历性，$\mu(F) = 1$，因此，

$$\dim F = \sup \dim T^{-n}E = \dim E.$$

令：

$$\alpha = \sup\{\beta \geqslant 0: A \subset X \text{ 且 } \dim A < \beta \text{ 蕴含 } \mu(A) = 0\}.$$

我们将证明 $\dim\mu = \alpha$. 为此，只需构造集合 F，使得 $\dim F = \alpha$ 且 $\mu(F) = 1$. 由 α 的定义，任给 $n \geqslant 1$，存在 E_n，使得：

$$\dim E_n < \alpha + \frac{1}{n}, \text{且 } \mu(E_n) > 0.$$

根据前面所证，可以构造 F_n，使得：

$$\dim F_n < \alpha + \frac{1}{n}, \text{且 } \mu(F_n) = 1.$$

最后可令 $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

现在讨论第二种遍历性 .

设 G 为可度量化的局部紧 Abel 群，D 为 G 的可数子群. 如果 $A + d = A(\forall d \in D)$，则集合 $A \subset G$ 称为 D - 不变的 . 如果对每一个 D - 不变集 A，$\mu(A) = 0$ 或 1，则概率测度 μ 称为 D - 遍历的.

μ 的 D - 遍历性等价于下列事实：任给两个满足 $\mu(E) > 0, \mu(E') > 0$ 的集合 E 和 E'，存在 $d \in G$，使得 $\mu((E - d) \bigcap E') > 0$.

如果对任给的满足 $\mu(E) > 0, \mu(E') > 0$ 的两个集合 E 和 E'，存在 $x \in G$（不一定属于 D），使得 $\mu((E - x) \bigcap E') > 0$，则称 μ 为能测度 .

由此可见，能测度的概念弱于 D - 遍历测度的概念 .

依照证明定理2.2.10 的同样方法，可以证明下述定理：

定理2.2.11　可度量化的局部紧 Abel 群上的能测度为单维数测度 .

根据上述两定理，可见许多测度都是单维数测度. 但是计算具体的维数，则是另外一个问题 . 我们所提供的工具之一是定理2.2.8 中的测度的维数公式. 关于维数的计算，可参看文献[2],[8],[11]-[18].

测度的 Packing 维数也有并行的理论.

2.3　符号空间上的 Gibbs 测度

这里要介绍的 Gibbs 测度理论应属于 D. Ruelle. Gibbs 测度起源于热动力学理论 . 其主要定理的证明不同于原始的证明，而是建立在 Gibbs测度理论之上的. 利用 Perron - Frobenius 定理，可以不需要 Ruelle 理论而直接构造出

Gibbs 测度.我们将由此入手展开讨论.

2.3.1 Parry - Markov - Gibbs 测度

1. 引言

我们先考虑一个物理模型,以便于了解 Gibbs 测度的物理意义.假定一个物理系统有 m 种可能状态 $\Sigma_1,\cdots,\Sigma_m$,它们的能量分别为 $E_1,\cdots,E_m$(固定不变的),概率为 $p_1,\cdots,p_m$(可以变化的).我们定义系统的熵为:

$$S = S(p_1,\cdots,p_m) = -\sum_{j=1}^{m} p_j \log p_j,$$

平均能量为:

$$E = E(p_1,\cdots,p_m) = \sum_{j=1}^{m} p_j E_j,$$

自由能量为:

$$F = F(p_1,\cdots,p_m) = S - \beta E,$$

其中 $\beta = 1/kT$(k 为物理常数,T 为温度,假定 T 为常数).

利用 Lagrange 乘数法,容易证明:

$$\max_{p_j\geqslant 0,\sum p_j = 1} F(p_1,\cdots,p_m) = \log\left(\sum_{j=1}^{m} e^{-\beta E_j}\right),$$

且最大值点由

$$p_j = \frac{e^{-\beta E_j}}{\sum_{j=1}^{m} e^{-\beta E_j}}$$

确定.这个最大值点$(p_1,\cdots p_m)$所确定的概率在物理学上被称为 Gibbs 分布.确切地说,是能量为$(E_1,\cdots,E_m)$的系统$(\Sigma_1,\cdots,\Sigma_m)$的 Gibbs 分布.

现考虑一个较复杂的系统.以整数点集 $\mathbf{Z}$ 表示其位置,以$\{1,2,\cdots,m\}$表示每个位置 $j\in\mathbf{Z}$ 可能出现的状态.因此,系统的某个配置由取值于集合$\{1,2,\cdots,m\}$中的一个序列表示,即由 $\overline{x} = (x_j)\in\{1,2,\cdots,m\}^{\mathbf{Z}}$ 表示.我们按下列方法来定义该系统的能量.

(1) $\varphi_1(k)$ 表示由于外力对状态 $k\in\{1,2,\cdots,m\}$的作用而产生的能量.假定该能量与状态的位置无关.

(2) $\tilde{\varphi}_2(i_1,i_2;k_1,k_2)$ 表示位置 i_1,i_2 处的状态 k_1,k_2 之间相互作用而产

生的能量．假定 $\tilde{\varphi}_2$ 为齐性且对称的，即假定存在函数 $\varphi_2(j_1;k_1,k_2)$，使得：

$$\tilde{\varphi}_2(i_1,i_2;k_1,k_2)=\varphi_2(i_1-i_2;k_1,k_2),$$

$$\varphi_2(j;k_1,k_2)=\varphi_2(-j;k_1,k_2).$$

于是，系统的状态 $x\in\{1,2,\cdots,m\}$ 表现在零位置 x_0 的能量，定义为零位置受外力的作用及其与其他位置 x_j 相互作用所产生的能量之和，即：

$$\varphi(x_0)=\varphi_1(x_0)+\frac{1}{2}\sum_{j\neq 0}\varphi_2(j;x_j,x_0).$$

而配置 $\bar{x}$ 的能量应是：

$$E(\bar{x})=\sum_j\varphi_1(x_j)+\sum_{j<k}\varphi_2(k-j;x_k,x_j).$$

由于上述两个级数的收敛性有待研究，因此，我们先讨论部分状态：$(x_{-n},\cdots,x_0,\cdots,x_n)$，也就是说，讨论具有 m^{2n+1} 个配置的有限系统．

状态 $(x_{-n},\cdots,x_0,\cdots x_n)$ 的能量可以定义为：

$$E_n(x_{-n},\cdots,x_0,\cdots,x_n)=\sum_{j=-n}^{n}\varphi_1(x_j)+\sum_{n\leqslant j<k\leqslant n}\varphi_2(k-j;x_k,x_j).$$

根据前面的简单模型，该系统的 Gibbs 分布 μ 应是：

$$\mu_n(x_{-n},\cdots,x_0,\cdots,x_n)=Z_n^{-1}e^{\beta E_n(x_{-n},\cdots,x_0,\cdots,x_n)},$$

其中，

$$Z_n=\sum_{x_{-n},\cdots,x_0,\cdots,x_n}e^{\beta E_n(x_{-n},\cdots,x_0,\cdots,x_n)}.$$

假设分布 μ_n 的极限 μ 存在，自然可以视 μ 为无限系统的 Gibbs 分布．

令：

$$\sum_{j=1}^{\infty}j\sup_{x',x''}|\varphi_2(j;x',x'')|<\infty,$$

这意味着，距离远的两位置相互作用弱．如果在能量 $E_n(x_{-n},\cdots,x_0,\cdots,x_n)$ 中加入 $x_j(|j|\leqslant n)$ 与其他 x_k 之间的相互作用，则修正后的能量可表示为：

$$\sum_{j=-n}^{n}\varphi(\sigma^j x).$$

该能量与原有能量 E_n 相差不超过某常数 C．修正后的能量的表达式使用起来很方便．因此，取代原有分布 μ_n，我们考虑由 φ 表示的一个新分布 $\tilde{\mu}_n$，即：

$$\tilde{\mu}_n(x_{-n},\cdots,x_0,\cdots,x_n) = \tilde{Z}_n^{-1} e^{-\beta\sum_{j=-n}^{n}\varphi(\sigma^j x)},$$

其中，

$$\tilde{Z}_n^{-1} = \sum_{x_{-n},\cdots,x_0,\cdots,x_n} e^{-\beta\sum_{j=-n}^{n}\varphi(\sigma^j x)}.$$

显然，比值 $\tilde{\mu}_n/\mu_n$ 介于两个常数之间，因此如果 Gibbs 测度 μ 存在，它应该满足下述关系：

$$\xi^{-1} \leqslant \frac{\mu\{y: y_j = x_j, |j| \leqslant n\}}{\exp\left[-P_\beta n + \beta\sum_{j=-n}^{n}\varphi(\sigma^j x)\right]} \leqslant \xi$$

这里 ξ 为常数，而且有：

$$P_\beta = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{(x_{-n},\cdots,x_0,\cdots,x_n)} e^{\beta E_n(x_{-n},\cdots,x_0,\cdots,x_n)}$$

称为平衡状态的压力．

2． Parry – Markov 测度

设 $A=(a_{ij})$ 为取值 0 或 1 的 $m\times m$ 矩阵，它定义了单边符号空间的一个子空间 Σ_A^+．假定 A 为不可约的，设 $B=(b_{ij})$ 为 $m\times m$ 的非负矩阵．假定 $b_{ij}>0 \Leftrightarrow a_{ij}=1$．由矩阵 B 可以定义一个（能量）函数 $\varphi:\Sigma_A^+\to\mathbf{R}^+$，即：

$$\varphi(x) = b_{x_0x_1}.$$

显然，φ 是连续的，$x\in\Sigma_A$ 当且仅当 $\varphi(T^jx)>0$，$\forall j\geqslant 0$．

现在来构造以 φ（或 $\log\varphi$）为能量的 Gibbs 测度．

由 Perron – Frobenius 定理保证，非负不可约矩阵 B 具有极大特征值 $\rho>0$ 及相应的严格正的左特征向量 $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_m)$ 和右特征向量 $\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_m)^t$，即：

$$\mu B = \rho\mu,\quad B\nu = \rho\nu.$$

选取 μ 和 ν，使得 $\sum_{j=1}^{m}\mu_j\nu_j = 1$．进而定义概率向量 $\pi=(\pi_j)$ 和随机矩阵 $P=(p_{ij})$：

$$\pi_j = \mu_j\nu_j,\quad p_{ij} = \frac{1}{\rho}\frac{\pi_j}{\pi_i}b_{ij}.$$

容易验证，$\pi = P\pi$．因此，可以定义以 π 为初始概率、以 P 为转移概率的

Markov 测度 μ. 确切地说,

$$\mu(I_n(x)) = \pi_{x_0} p_{x_0x_1} \cdots p_{x_{n-2}x_{n-1}},$$

或

$$\mu(I_n(x)) = \frac{b_{x_0x_1} b_{x_1x_2} \cdots b_{x_{n-2}x_{n-1}} \pi_{x_{n-1}}}{\rho^{n-1}},$$

或

$$\mu(I_n(x)) = \frac{\varphi(x)\varphi(Tx)\cdots\varphi(T^{n-2}x)\pi_{x_{n-1}}}{\rho^{n-1}}.$$

定理2.3.1　设 φ 为由 B 确定的能量函数,ρ 为 B 的最大特征值. 存在概率测度 $\mu \in M_1^+(\Sigma_A^+)$,使得对于某个常数 $\xi > 0$,对所有 $n \geqslant 1$ 和 $x \in \Sigma_A^+$,有:

$$\xi^{-1} \leqslant \frac{\mu(I_n(x))}{\exp\left[n \log\rho - \sum_{j=0}^{n-1} \log \varphi(T^j x)\right]} \leqslant \xi.$$

证明　根据上述 Markov 测度 μ 的构造,只需利用 π、ρ 和 φ 在 Σ_A^+ 的正则性,即得定理.

任给 $\alpha \in \mathbf{R}$,以 B^α 记矩阵 (b_{ij}^α)(约定 $0^\alpha = 0$). 该矩阵确定函数 φ^α,以 $\rho(\alpha)$ 记 B^α 的最大特征值,则依定理2.3.1,存在测度 $\mu_\alpha \in M_1^+(\Sigma_A^+)$,使得:

$$\xi_\alpha^{-1} \leqslant \frac{\mu_\alpha(I_n(x))}{\exp\left[n \log \rho(\alpha) - \alpha \sum_{j=0}^{n-1} \log \varphi(T^j x)\right]} \leqslant \xi_\alpha.$$

我们称族 $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in R}$ 为 φ 的 Gibbs 测度. 每个 Gibbs 测度 μ_α 都以 Σ_A^+ 为支集.

μ_α 的其他性质综述如下:

(1) μ_α 为 T - 不变的遍历测度.

(2) 公式:

$$\log \rho(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left\{ \sum_{(x_0,\cdots,x_n)} \exp \alpha \sum_{j=0}^{n-1} \log \varphi(T^j x) \right\}$$

成立.

(3) 满足定理的 T - 不变测度是唯一的.

(4) $\rho(\alpha): \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$ 为严格递减的实解析函数.

下一节,我们将就较一般的能量函数证明 Gibbs 测度的存在性及其性质.

2.3.2 Gibbs 测度

1. Gibbs 测度的存在性及 Ruelle 定理

设有函数 $\varphi:\Sigma_A^+ \to \mathbf{R}$. 定义:

$$\mathrm{var}_n(\varphi) = \sup_{x_j = y_j, 0 \leqslant j \leqslant n-1} |\varphi(x) - \varphi(y)|.$$

可见 φ 为连续函数,即 $\varphi \in C(\Sigma_A^+)$ 当且仅当 $\mathrm{var}_n(\varphi) \to 0 (n \to \infty)$.

一般 Gibbs 测度的存在性定理可陈述为:

定理 2.3.2 [19,20,21] 假定 A 为本原矩阵,$\varphi \in C(\Sigma_A^+)$ 满足条件 $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{var}_n(\varphi) < +\infty$,则存在唯一 T - 不变概率测度 $\mu \in M_1^+(\Sigma_A^+)$,使得:

$$\xi^{-1} \leqslant \frac{\mu(I_n(x))}{\exp\left[-nP + \sum_{j=0}^{n-1}\varphi(T^j x)\right]} \leqslant \xi, \qquad \forall\, n \geqslant 1 \text{ 及 } x \in \Sigma_A^+,$$

这里 $\xi > 0$ 和 $P > 0$ 为常数.

这一定理的证明依赖于 Ruelle 定理,后者的证明用了 Ruelle 算子 $L_\varphi: C(\Sigma_A^+) \to C(\Sigma_A^+)$,即:

$$L_\varphi f(x) = \sum_{y \in T^{-1}x} e^{\varphi(y)} f(y).$$

以 L_φ^* 记 L_φ 的共轭算子.

定理2.3.3 对 A 和 φ,做与定理2.3.2相同的假设,则存在常数 $\rho > 0$,函数 $h > 0$ 且 $h \in C(\Sigma_A^+)$ 和测度 $\nu \in M_1^+(\Sigma_A^+)$,使得:

$$L_\varphi h = \rho h, L_\varphi^* \nu = \rho \nu, \quad \langle h, \nu \rangle = 1,$$

并且对任何 $f \in C(\Sigma_A^+)$,有一致极限:

$$\lim_{n\to\infty} \rho^{-n} L_\varphi^n f = \langle f, \nu \rangle h.$$

现由定理2.3.3 导出定理2.3.2.

(1) μ 的构造. 取 $\mu = h\nu, \mu(f) = \nu(fh)$. 它是一个概率测度,这是因为 $\langle h, \nu \rangle = 1$.

(2) μ 的不变性. 由 $Tf = f \cdot T$ 定义算子 $T: C(\Sigma_A^+) \to C(\Sigma_A^+)$,则 T 与 L_φ 之间有下列关系:任给 $g, h \in C(\Sigma_A^+)$,

$$(L_\varphi^n g) f = L_\varphi^n (g \cdot T^n f), \qquad \forall\, n \geqslant 1.$$

为证此式，只需用归纳法证明：

$$L_\varphi^n g(x) = \sum_{y\in T^{-n}x} e^{S_n\varphi(y)} g(y),$$

其中，$S_n\varphi(y) = \sum_{j=0}^{n-1}\varphi(T^j y)$. 利用上式 $n = 1$ 的情形，可以验证等式 $< f,\mu > = < Tf,\mu >$.

事实上，若令 $L = e^{-1}L_\varphi$，我们有：

$$\begin{aligned}
< f,\mu > &= < hf,\nu > && (\text{因 } \mu = h\nu)\\
&= < (Lh)\cdot f,\nu > && (\text{因 } Lh = h)\\
&= < L(h\cdot Tf),\nu > && (\text{因上述关系式})\\
&= < h\cdot Tf,\nu > && (\text{因 } L^*\nu = \nu)\\
&= < Tf,\mu > && (\text{因 } \mu = h\nu).
\end{aligned}$$

(3) Gibbs 性. 令 $L = \rho^{-1}L_\varphi$. 注意下列 μ 与 L 的关系：对于任何 Borel 集 E 和任何 $n > 1$，有：

$$\mu(E) = < L^n(h1_E),\nu >.$$

另外，我们有表达式：

$$L^n(h1_E)(z) = \rho^{-n}\sum_{y\in T^{-n}z} e^{S_n\varphi(y)}h(y)1_E(y).$$

可见，为估计 $\mu(E)$，只需估计 $L^n(h1_E)$，而后者大致可以说是计算包含在 E 中的点 $T^{-n}z$ 的个数．

设 $E = I_n(x)$，$z\in\Sigma_A^+$. 显然 $I_n(x)$ 中至多含有 $T^{-n}z$ 中一个点 y. 另外，至少存在一点 $y'\in T^{-N}z$，满足 $y'_0 = x_0$（这里 N 满足 $A^N > 0$）. 从而，$I_n(x)$ 中至少包含有 $T^{-n-N}z$ 中一个点 y. 这两个事实使得对任何 $z\in\Sigma_A^+$，有：

$$L^n(h1_{I_n(x)})(z) \leqslant \rho^{-n}\exp[\sup_{y\in I_n(x)} S_n\varphi(y)]\sup_{y\in\Sigma_A^+} h(y),$$

$$L^{n+N}(h1_{I_n(x)})(z) \geqslant \rho^{-n-N}\exp[-N\|\varphi\| + \inf_{y\in I_n(x)} S_n\varphi(y)]\inf_{y\in\Sigma_A^+} h(y).$$

令 $C = \sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{var}_j\varphi$，$h_{\max} = \sup h$，$h_{\min} = \inf h$，则：

$$\sup_{y\in I_n(x)} S_n\varphi(y) - c \leqslant S_n\varphi(x)$$

$$\leqslant \inf_{y \in I_n(x)} S_n \varphi(y) + c.$$

从而，

$$\frac{h_{\min} e^{c}}{\rho^{N}} \leqslant \frac{\mu(I_n(x))}{\exp[-n\log\rho + S_n\varphi(x)]} \leqslant h_{\max} e^{c}.$$

(4) 遍历性.其实，测度 μ 是强混合的．为此只需证明，对于任何 $f, g \in C(\Sigma_A^+)$，积分 $< gT^n f, \mu >$ 趋向于 $< g, \mu >< f, \mu >$. 事实上，

$$\begin{aligned} < gT^n f, \mu > &= < hgT^n f, \nu > \\ &= < \rho^{-n} L_\varphi^n (hgT^n f), \nu > \\ &= < \rho^{-n} L_\varphi^n (hg) f, \nu > \to << hg, \nu > hf, \nu > \\ &= < g, \mu >< f, \mu >. \end{aligned}$$

(5) 唯一性.假定 μ' 是另外一个满足定理中不等式的不变测度，并假定相应的常数为 P'. 容易验证：

$$P' = P = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{x \in T_n} e^{S_n \varphi(x)},$$

其中 T_n 是 Σ_A^+ 中的一个子集，它使得 $I_n(y)(y \in T_n)$ 构成 Σ_A^+ 的一个分划．有了等式 $P' = P$，则不难看出 μ 和 μ' 是相互绝对连续的．令 $f = \mathrm{d}\mu'/\mathrm{d}\mu$. 可以验证，$Tf = f$ 是 μ - 几乎处处成立．再因 μ 的遍历性得，f 是 μ - 几乎处处为常数．

2. Gibbs 测度

本节中我们介绍 Gibbs 测度，并将给出唯一性的充分条件，也为下节证明 Ruelle 定理作准备．

非负函数 $g \in C(\Sigma_A^+)$ 称为规范化的，如果它满足：

$$\sum_{y \in T^{-1}x} g(y) = 1, \qquad \forall\, x \in \Sigma_A^+.$$

给定一个规范化函数 g，定义 Keane 算子 $\Phi_g : C(\Sigma_A^+) \to C(\Sigma_A^+)$，即：

$$\Phi_g f(x) = \sum_{y \in T^{-1}x} g(y) f(y),$$

如果 $g > 0$，令 $\varphi(x) = \log g(x)$，则 Φ_g 为 Ruelle 算子 L_φ.

现在我们定义一列算子. 如果 $n \geqslant 1$，定义 $P_n = T^n \Phi_g^n$，即：

$$P_n f(x) = \sum_{y \in T^{-n}T^n x} G_n(y) f(y),$$

其中 $G_n(y) = \prod_{j=0}^{n-1} g(T^j y)$. 这一列算子满足下面的性质:

$$P_n 1 = 1, \quad P_n f \geq 0, \quad \forall f \geq 0,$$

$$P_n P_m = P_m P_n = P_m, \quad \forall m \geq n,$$

$$P_n(hf) = hP_n f, \qquad \forall h f = P_n h.$$

考虑 P_n 的共轭算子 P_n^*. 任给 $n \geq 1$,令:

$$K_n = \{\mu \in M_1^+(\Sigma_A^+) : P_n^* \mu = \mu\}.$$

依 Schauder – Tychonoff 定理,K_n 为非空紧凸集. 更进一步,交集:

$$K_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$$

仍然是一非空紧凸集. 关键是证 K_∞ 非空. 我们可以这样来证明非空性. 任取 $\mu \in M_1^+(\Sigma_A^+)$. 由于 $P_n^* \mu \in M_1^+(\Sigma_A^+)$,存在序列 $\{P_n^* \mu\}$ 的一个弱极限. 令 $P_{n_k}^* \mu \to \mu_\infty$,我们断言,$\mu_\infty \in K_\infty$. 事实上,任给 $f \in C(\Sigma_A^+)$ 及 $n \geq 1$,得到:

$$\begin{aligned} < f, P_n^* \mu_\infty > &= \lim_{k \to \infty} < P_n f, P_{n_k}^* \mu > \\ &= \lim_{k \to \infty} < f, P_n^* P_{n_k}^* \mu > \\ &= \lim_{k \to \infty} < f, P_{n_k}^* \mu > \\ &= < f, \mu_\infty >. \end{aligned}$$

在第三个等式中,我们利用了 $P^* P_m^* = P_m^* (m \geq n)$.

非空紧凸集 K_∞ 中的点(即 P_n^* 的公共不动点)称为 Gibbs 测度.

一个自然的问题是,何时 K_∞ 为单点集,也就是说,何时有唯一的 Gibbs 测度. 下面命题给出一个判别准则.

命题2.3.1　给定非负规范化函数 $g \in C(\Sigma_A^+)$. 下列几种事实等价:

(i) 存在唯一的 Gibbs 测度;

(ii) 对任何 $f \in C(\Sigma_A^+)$,$P_n f$ 一致地收敛于某常数;

(iii) 对任何 $f \in C(\Sigma_A^+)$,$P_n f$ 逐点收敛于某常数.

证明　首先注意到,对任何 $\mu \in K_\infty$,(ii) 与(iii) 中的常数应等于 $< \mu, f >$. 事实上,依 Lebesgue 定理,有:

$$\lim_{n \to \infty} P_n f$$

$$= < \mu, \lim_{n\to\infty} P_n f > = \lim_{n\to\infty} < \mu, P_n f >$$

$$= \lim_{n\to\infty} < P_n^* \mu, f > = < \mu, f >.$$

(iii) → (i). 设 $\mu, \nu \in K_\infty$，则任给 $f \in C(\Sigma_A^+)$，有：

$$< \mu, f > = \lim_{n\to\infty} P_n f = < \nu, f >.$$

(i) → (ii). 假定(ii)不成立，则存在 $f \in C(\Sigma_A^+)$，使得 $P_n f$ 不能一致地趋向于 $< \mu, f >$，其中 μ 为某个任意固定的 G － 测度．换言之，任给 $\epsilon > 0$，存在整数序列 $\{n_j\}$ 和序列 $\{x_{n_j}\} \subset \Sigma_A^+$，使得：

$$| P_{n_j} f(x_{n_j}) - < \mu, f > | \geqslant \epsilon.$$

注意，$P_{n_j} f(x_{n_j}) = < P_{n_j}^* \delta x_{n_j}, f >$，令 ν 为 $\{P_{n_j}^* \delta x_{n_j}\}$ 的某个弱极限，它是一个 Gibbs 测度，则：

$$| < \nu, f > - < \mu, f > | \geqslant \epsilon.$$

(ii) → (iii). 显然．

如果 K_∞ 不是单点集，我们自然要问 K_∞ 的结构如何．为了刻画 K_∞ 的结构，我们将引入某种遍历性．设 A^n 为由 P_n 的像所生成的 σ － 域．令 A^∞ 为 A^n 的递减极限．一个 Gibbs 测度，如果在 A^∞ 上平凡，则称为遍历的．

其实，算子 P_n 可以由下列条件期望来表示：

$$P_n f = \mathcal{E}_\mu(f \mid \mathscr{A}^n), \qquad \mu \text{ 几乎处处存在},$$

这里 μ 为某个 Gibbs 测度．这一表达式成立是因为 $< g P_n f, \mu > = < f g, \mu >$ ($\forall g \in I_m P_n$).

于是，关于概率测度 μ，$P_n f$ 是一个逆向鞅，从而极限 $\lim_{n\to\infty} P_n f$ 为 μ － 几乎处处存在．

如果 μ 是遍历的，我们更有：

$$\lim_{n\to\infty} P_n f = < f, \mu >, \qquad \mu - \text{几乎处处存在}.$$

命题2.3.2　给定非负规范化函数 $g \in C(\Sigma_A^+)$. 下列断言成立：

(i) 如果 μ_1 和 μ_2 均为遍历 Gibbs 测度，则有 $\mu_1 = \mu_2$，或 $\mu_1 \perp \mu_2$；

(ii) $\mu \in K_\infty$ 是遍历的，当且仅当 μ 为 K_∞ 的极端点．

证明　(i) 假定 $\mu_1 \neq \mu_2$，则存在 $f \in C(\Sigma_A^+)$，使得 $< \mu_1, f > \neq < \mu_2, f >$. 定义：

$$A = \{x \in \Sigma_A^+ : \lim_{n\to\infty} P_n f = < \mu_2, f >\}.$$

依遍历性，$\mu_1(A) = 1$ 而 $\mu_2(A) = 0$. 故 $\mu_1 \perp \mu_2$.

(ii) 假定 $\mu \in K_\infty$ 是遍历的，而且 $\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$，这里 $\mu_1, \mu_2 \in K_\infty$，$0 < \alpha < 1$.

任给 $A \in A_\infty$，由 μ 的遍历性，$\mu(A) = 0$ 或 1. 从而 $\mu_1(A) = \mu_2(A) = 0$ 或 1. 所以，μ_1 和 μ_2 均为遍历的. 从而 $\mu_1 = \mu_2$(见(i) 的证明)，故 μ 为极端点 .

反之，设 $\mu \in K_\infty$ 不是遍历的，则可以找到 $B \in \mathscr{A}^\infty$，使得 $0 < \alpha = \mu(B) < 1$，定义：

$$\mu_1 = \frac{1}{\alpha}\mu 1_B, \qquad \mu_2 = \frac{1}{1-\alpha}\mu 1_{\Sigma_A^+ \setminus B}.$$

可以验证，$\mu_1, \mu_2 \in K_\infty$，且 $\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$，故 μ 不是极端点 .

下面是一个定量的 Gibbs 测度唯一性条件 .

命题2.3.3　设 $T: \Sigma_A^+ \to \Sigma_A^+$ 为一个拓扑混合的单边有限型子位移(即 A 为本原的). 设 $g > 0$ 为一个规范化函数 . 如果存在常数 $C > 0$，使得：

$$\frac{G_n(y)}{G_n(x)} \leqslant C, \qquad \forall\ n \geqslant 1, x \in \Sigma_A^+, y \in I_n(x),$$

则存在唯一的 Gibbs 测度 .

证明　定理中的条件可表示成：

$$C^{-1} G_n(x) \leqslant G_n(y) \leqslant C\, G_n(x), \qquad \forall\ y \in I_n(x).$$

考虑某个 Gibbs 测度及 $I_n(x)$ 的特征函数 $1_{I_n}(x)$. 对任何 $M \geqslant 0$，我们有：

$$\begin{aligned}\mu(I_n(x)) &= \mathscr{E}_\mu\left[\mathscr{E}_\mu(1_{I_n}(x) \mid \mathscr{A}^{n+M})\right] \\ &= \mathscr{E}_\mu P_{n+M} 1_{I_n(x)}(y).\end{aligned}$$

由混合性，存在 M，使得 $a_{ij}^M = 1 (1 \leqslant i, j \leqslant m)$，从而有：

$$\begin{aligned}P_{n+m} 1_{I_n(x)}(y) &= \sum_{z \in T^{-n-M}T^{n+m}y} 1_{I_n(x)}(z) G_{n+M}(z) \\ &\geqslant G_{n+M}(x_0, \cdots, x_{n-1}, y_n^*, \cdots, y_{n+M-1}^*, y_{n+M}, \cdots),\end{aligned}$$

这里$(y_n^*, \cdots, y_{n+M-1}^*)$ 是某个有限序列，它使得：

$$(x_0, \cdots, x_{n-1}, y_n^*, \cdots, y_{n+M-1}^*, y_{n+M}, \cdots) \in \Sigma_A^+.$$

然而，依条件：

$$G_{n+M}(x_0,\cdots,x_{n-1},y_n^*,\cdots,y_{n+M-1}^*,y_{n+M},\cdots)\geqslant C^{-1}D^M G_n(x),$$

其中 $D>0$ 是 g 的极小值．于是，

$$\mu(I_n(x))\geqslant C^{-1}D^M G_n(x).$$

依同样的方式，取 $M=0$，可以证明 $\mu(I_n(x))\leqslant C\,G_n(x)$．所以，如果 μ' 和 μ'' 为两个（遍历）Gibbs 测度，则：

$$\mu'(I_n(x_0))\leqslant \frac{C^2}{D^M}\mu''(I_n(x)). \tag{2.3.1}$$

(2.3.1) 式说明 μ' 绝对连续于 μ''．故由命题2.3.2 得 $\mu'=\mu''$．

命题2.3.4　任给 $f\in C(\Sigma_A^+)$，$P_n f$ 一致收敛于某常数，当且仅当 $\Phi_g^n f$ 一致收敛于某常数．

证明　假定 $P_n f$ 一致地收敛于常数 $C=C(f)$，则任给 $\epsilon>0$，存在 $N>0$，使得：

$$n\geqslant N\ \text{蕴含}\ |P_n f(x)-C|\leqslant\epsilon,\qquad \forall\ x\in\Sigma_A^+.$$

由于 $P_n f(x)=\Phi_g^n f(T^n x)$，而 $T^n:\Sigma_A^+\to\Sigma_A^+$ 是满射，故：

$$n\geqslant N\ \text{蕴含}\ |\Phi_g^n f(y)-C|\leqslant\epsilon,\qquad \forall\ y\in\Sigma_A^+.$$

同理可证逆命题．

3.　Ruelle 定理的证明

(1) 特征值 ρ 与特征测度 ν 的存在性．算子 L_φ 是连续的，其共轭算子也是连续的．特别地，$<1,L_\varphi^*\mu>$ 是定义在集合 $M_1^+(\Sigma_A^+)$ 上的一个严格正的连续函数．由 Schauder－Tychonoff 定理，$<1,L_\varphi^*\mu>^{-1}L_\varphi^*\mu$ 为连续映射，且有不动点 $\nu\in M_1^+(\Sigma_A^+)$，即：

$$L_\varphi^*\nu=\rho\nu,$$

其中 $\rho=<1,L_\varphi^*\nu>$．

(2) 特征函数 h 的存在性．令 $B_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathrm{var}_k\,\varphi$．考虑集合：

$$\Lambda=\{f\in C(\Sigma_A^+):f\geqslant 0,\ <f,\nu>=1,$$
$$f(y)\leqslant B_n f(x),\ \forall\ y\in I_n(x),h\geqslant 1\}.$$

先证明 Λ 为 $C(\Sigma_A^+)$ 中的紧凸集，并且在 $L=\rho^{-1}L_\varphi$ 下不变．再由 Schauder－Tychonoff 定理可以导出 h 的存在性．

Λ 的凸性和闭性是显然的．为证 Λ 的紧性，只要证明 Λ 是有界的且等度

连续的．

首先验证 $L\Lambda\subset\Lambda$. 设 $f\in\Lambda$，显然 $Lf\geqslant 0$, $<f,\nu>=1$，如果 $y\in I_n(x)$，则下列公式成立：

$$Lf(y)=\rho^{-1}\sum_{j:a_{jy_0}=1}e^{\varphi(jy)}f(jy),$$

$$Lf(x)=\rho^{-1}\sum_{j:a_{jx_0}=1}e^{\varphi(jx)}f(jx).$$

由于 $y_0=x_0$, $\{j:a_{jy_0}=1\}=\{j:a_{jx_0}=1\}$. 注意到：

$$\varphi(jy)\leqslant\varphi(jx)+\mathrm{var}_{n+1}\varphi,$$

而 $f(jy)\leqslant B_{n+1}f(jx)$，所以，

$$\begin{aligned}Lf(y)&\leqslant B_{n+1}e^{\mathrm{var}_{n+1}\varphi}Lf(x)\\&\leqslant B_nLf(x).\end{aligned}\tag{2.3.2}$$

为证 Λ 的有界性，考虑任意两点 $z,x\in\Sigma_A^+$. 由 T 的混合性，存在 $y\in T^{-N}z$，使得 $y_0=x_0$. 于是，

$$\begin{aligned}L_\varphi^Nf(z)&\geqslant e^{S_N\varphi(z)}f(y)\\&\geqslant e^{-N\|\varphi\|}B_1^{-1}f(x).\end{aligned}$$

关于 z 求积分，注意到 $<f,\nu>=1$，我们有：

$$\begin{aligned}f(x)&\leqslant B_1\rho^Ne^{N\|\varphi\|}<\rho^{-N}L_\varphi^Nf,\nu>\\&=B_1\rho^Ne^{N\|\varphi\|}=K.\end{aligned}$$

为证 Λ 的等度连续性，只需注意到，对任何 $y\in I_n(x)$，有：

$$\begin{aligned}f(y)-f(x)&\leqslant f(x)(B_n-1)\\&\leqslant K(B_n-1),\end{aligned}\tag{2.3.3}$$

且 $B_n\to 1(n\to\infty)$.

另外，我们需要说明 $h>0$. 由于 $h=\rho^{-N}L_\varphi^Nh$ 及不等式(2.3.3)可知：

$$L_\varphi^Nh(z)\geqslant e^{-N\|\varphi\|}B_1^{-1}h(x).$$

我们有：

$$\begin{aligned}\inf h&=\inf\rho^{-N}L_\varphi^Nh\\&\geqslant\frac{\sup h}{B_1\rho^Ne^{N\|\varphi\|}}>0.\end{aligned}$$

(3) $\rho^{-n}L_\varphi^n f$ 的一致收敛性. 令:

$$g(x) = \frac{h(x)e^{\varphi(x)}}{\rho h(Tx)},$$

利用关系 $L_\varphi h = \rho h$ 可以验证 $g(x)$ 的规范化. 再令:

$$G_n(x) = \prod_{j=0}^{n-1} g(T^j x)$$

$$= \rho^{-n}\frac{h(x)}{h(T^n x)}e^{S_n\varphi(x)},$$

则 $y \in I_n(x)$,我们有:

$$\frac{G_n(y)}{G_n(x)} = \frac{h(y)}{h(T^n y)}\frac{h(T^n x)}{h(x)}\exp[S_n\varphi(y) - S_n\varphi(x)]$$

$$\leqslant \left(\frac{h_{\max}}{h_{\min}}\right)^2 \exp\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{var}_j\,\varphi < \infty.$$

根据命题2.3.3,存在唯一的 Gibbs 测度,故由命题2.3.1 和命题2.3.4,对任何 $f \in C(\Sigma_A^+)$,序列 $\Phi_g^n(f)$ 一致收敛到 $< f,\mu >$. 然而,我们有:

$$L_\varphi f(x) = \sum_{y\in T^{-1}x}\frac{h(y)e^{\varphi(y)}}{\rho h(x)}\cdot\frac{f(y)}{h(y)}\rho h(x)$$

$$= \rho h(x)\Phi_g(fh^{-1})(x).$$

更一般地(由归纳法得到),有:

$$L_\varphi^n f(x) = \rho^n h(x)\Phi_g^n(fh^{-1})(x).$$

由上述 $\Phi_g^n(f)$ 的一致收敛性,得:

$$\rho^{-n}L_\varphi^n f(x) \to h(x) < fh^{-1},\mu > = h < f,\nu >.$$

2.4 重分形

测度的重分形理论是在 80 年代中期由理论物理学家U. Frisch, G. Parisi, T.C. Halsey 等提出的. 其实, 重分形的概念可追溯到 70 年代初B. B. Mandelbrot 有关湍流的工作. U. Frisch, G. Paris 简化了B. B. Mandelbrot 提出的重分形表达式, 而 Benzi 等把该简化形式推广到动力系统上. 下面我们要介绍的是 T. C. Halsey 等提出的重分形的形式解. 现在, 人们已经得到了许多严格的结果, 即验证了形式解在理论上是成立的. 但是, 相应的结果总是只

适应于某类特殊的测度．我们将讨论两类简单的测度：乘积测度和自相似测度．后者是前者在某一特殊映射下的像．

2.4.1　问题的提出及其形式解

1．重分形的谱问题

设 X 为度量空间，若 $x\in X$，$r>0$，用 $B(x,r)$ 表示中心为 x 而半径为 r 的球．设 μ 为 X 上的 Borel（概率）测度．定义它在 x 点的下 Lipschitz 指数为：

$$\underline{D}(\mu,x)=\liminf_{r\to 0}\frac{\log\mu(B(x,r))}{\log r}.$$

同样，定义 μ 在 x 的上 Lipschitz 指数为：

$$\overline{D}(\mu,x)=\limsup_{r\to 0}\frac{\log\mu(B(x,r))}{\log r}.$$

如果有 $\underline{D}(\mu,x)=\overline{D}(\mu,x)$，则记其共同值为 $D(\mu,x)$．

再设 $\alpha\geqslant 0$，考虑集合：

$$E_\alpha=\{x\in X:D(\mu,x)=\alpha\},$$

这些 $E_\alpha(\alpha\geqslant 0)$ 可被视为 μ 的支集的某种分解．如果对于"许多"α，E_α 非空，则称 μ 为重分形测度．重分形的主要问题是通过计算 Hausdorff 维数来估计 E_α 的大小．为此，我们引入函数：

$$f(\alpha)=\dim_H E_\alpha.\tag{2.4.1}$$

该函数被称为"重分形谱"、"奇点谱"或简称为"$f(\alpha)$－谱"．大多数情形下，f 是某个区间上的光滑凸函数，且在该区间以外为零．

2．重分形谱的形式解

物理学家提出由下列公式来表示重分形谱[22,23,24]：

$$f(\alpha)=\inf_{q\in\mathbb{R}}\{\alpha q-\tau(q)\},$$

其中 $\tau(q)$ 为由测度 μ 直接定义的某个函数．可见，$f(\alpha)$ 正是 $\tau(q)$ 的 Legendre 变换 $\tau^*(\alpha)$．

下面讨论 $\tau(q)$ 在 1 维情形下如何定义．我们设 μ 为区间[0,1]上的概率测度．给定整数序列 $\{m_n\}$，其中 $m_n\geqslant 2$．先将区间[0,1]等分成 m_1 个小区间，再将每个小区间等分成 m_2 个更小的区间，… 如此继续．在第 n 步时，我们

得到 $\lambda_n(=m_1m_2\cdots m_n)$ 个区间,记 I_n 为那些使得 $\mu(I)\neq 0$ 的区间 I 构成的集合.现在,对于每个固定 $q\in\mathbf{R}$,可以定义:

$$\tau(q)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log\lambda_n}\log\sum_{I\in I_n}\mu(I)^q.$$

容易证明, $\tau(q)$为递增凸函数.

对于$f(\alpha)=\tau^*(\alpha)$, 我们给一个不太严格的说明.先看 Cantor 三分集上的 Lebesgue 测度 μ. 令 $\alpha=\log 2/\log 3$. 若以$|I|$记区间 I 的长度, 则有下列关系:

$$\mu(I)=|I|^\alpha,\qquad \forall I\in I_n,\quad \sum_{I\in I_n}|I|^\alpha=1.$$

这里对应的 m_n 均为 3. 由此可见,$\tau(q)=\alpha(q-1)$,$f(\alpha)=\alpha$.$f(\beta)=0(\forall\beta\neq\alpha)$.该测度不应视为重分形测度.现设 μ 为一个任意测度,对每个区间 I_i,由 $\mu(I_i)=|I_i|^{\alpha_i}$ 来定义 α_i,即 Lipschitz 指数.由 $\tau(q)$ 的定义,有:

$$\sum_{I\in I_n}|I|^{\alpha_i q-\tau(q)}\approx 1,\qquad \forall q\in\mathbf{R}.$$

假定 $\tau^*(\alpha)=\alpha q_0-\tau(q_0)$,则:

$$\sum_{\alpha_i=\alpha}|I_i|^{\tau^*(\alpha)}+\sum_{\alpha_i\neq\alpha}|I_i|^{\alpha_i q_0-\tau(q_0)}\approx 1.$$

如果第二个和式相对于第一个和式可以忽略不计(通常以大变差的方法可以证明这一点), 那么:

$$\sum_{\alpha_i=\alpha}|I|^{\tau^*(\alpha)}\approx 1.$$

于是,我们得到与 Cantor 集上 Lebesgue 测度类似的情形,即:

$$f(\alpha)=\dim_H E_\alpha=\tau^*(\alpha).\tag{2.4.2}$$

严格地说,我们使用的是与分割相关的超度量而不是欧氏度量.在许多情况下,例如对于 $m_n=3^n$,这两个度量定义相同的 Hausdorff 维数.在所见文献中,有两种方法来证明上述重分形谱公式(2.4.2),一种是基于遍历定理,另一种基于热动力学原理.

应该指出,公式 $f(\alpha)=\tau^*(\alpha)$ 并不是无条件地成立.我们举一个反例.

设 μ 为区间[0,1]上的 Lebesgue 测度与分布在零点的 Dirac 测度之和,则 $f(1)=1$,$f(\alpha)=0(\forall\alpha\neq 0)$,而 $\tau^*(\alpha)=\alpha$,$(\forall 0\leqslant\alpha\leqslant 1)$.

2.4.2　$\mathbf{R}^d$ 上自相似测度

1.　三元组系统的不变测度

根据定义可知，自相似测度是下述泛函方程的解：

$$\mu = \sum_{j=1}^{m} p_j \mu \circ w_j^{-1}, \qquad (2.4.2)'$$

其中 $W = (w_1, \cdots, w_m)$ 为拓扑空间 X 的 m 个(连续)变换，$P = (p_1, \cdots, p_m)$ 为某个概率向量．3 元组(X, W, P)称为一个系统．满足该方程的测度称为系统的不变测度．在这里只限于讨论特殊情形：$X = \mathbf{R}^d$，

$$w_j(x) = s_j R_j(x) + b_j,$$

其中 $0 \leqslant s_j < 1$，R_j 为 $\mathbf{R}^d$ 的旋转，b_j 为 $\mathbf{R}^d$ 中的向量．这样的变换 w_j 称为自相似变换，相应的不变测度称为自相似测度．我们将研究在满足开集条件下，自相似测度的重分形．

为了清楚地描绘自相似测度，我们将采用符号空间及其上位移算子的逆变换．它们构成一个系统，拥有唯一的不变测度．该测度在某个映射下的像正是我们要研究的自相似测度．

设 $\Sigma = \{1, 2, \cdots, m\}^{\mathbf{N}}$ 为取值于 m 个符号 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 的无穷序列空间，$m \geqslant 2$. 对每个 $1 \leqslant j \leqslant m$，定义映射 $u_j: \Sigma \to \Sigma$ 为 $u_j(\sigma) = j\sigma$. 这些映射为压缩映射，进而，我们有：

$$d(u_j(\sigma), u_j(\tau)) = \frac{1}{e} d(\sigma, \tau).$$

记 $U = (u_1, u_2, \cdots, u_m)$. 系统$(\Sigma, U, P)$称为符号系统，它具有唯一的不变测度，即乘积测度 ν：

$$\nu(I_n(\sigma)) = p_{\sigma_1} p_{\sigma_2} \cdots p_{\sigma_n}.$$

命题 2.4.1　设系统$(\mathbf{R}^d, W, P)$如上所述，则：

(i) 存在唯一的紧集 A(称为系统的吸引集)，使得：

$$A = w_1(A) \bigcup w_2(A) \bigcup \cdots \bigcup w_m(A);$$

(ii) 方程$(2.4.2)'$具有唯一的解 μ，它的支集为 A；

(iii) 下列极限存在，且不依赖于 $x \in \mathbf{R}^d$，

$$\Phi(\sigma) = \lim_{n \to \infty} w_{\sigma_1} \circ \cdots \circ w_{\sigma_n}(x),$$

映射 $\Phi:\Sigma \to A$ 是连续的满射，并且满足：

$$u_j \circ \Phi = \Phi \circ w_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

(iv) 测度 μ 为测度 ν 在 Φ 映射下的像，即任给 $f:\mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^+$，有：

$$\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\Sigma} f \circ \Phi(\sigma)\mathrm{d}\,\nu(\sigma).$$

2．符号系统的不变测度

命题2.4.1是我们熟知的[25,26]，它建立了系统$(\mathbf{R}^d, W, P)$的不变测度 μ 与符号系统(Σ, U, P)的不变测度 ν 之间的联系．在对 μ 作重分形分析之前，先尝试对 ν 进行研究．我们所需要的工具只是强大数定律和Billingsley定理．

特殊情形 $p_1 = p_2 = \cdots = p_m = 1/m$ 是平凡的，相应的不变测度为 Σ 上的均匀测度，故设：

$$p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant p_m, \qquad p_1 > p_m.$$

令：

$$E_\beta = \{\sigma \in \Sigma : D(\nu,\sigma) = \beta\}, \qquad \beta \in \mathbf{R},$$

$$h(\alpha) = -\log\sum_{j=1}^{m} p_j^\alpha, \qquad \alpha \in \mathbf{R}.$$

若令 $p(\alpha) = \sum\limits_{j=1}^{m} p_j^\alpha$，则：

$$h'(\alpha) = -\frac{1}{p(\alpha)}\sum_{j=1}^{m} p_j^\alpha \log p_j,$$

$$h''(\alpha) = \frac{1}{p^2(\alpha)}\Big[\Big(\sum_{j=1}^{m} p_j^\alpha \log p_j\Big)^2 - p(\alpha)\sum_{j=1}^{m} p_j^\alpha \log^2 p_j\Big].$$

我们把 h 及其Legendre变换的性质陈述在下面引理中．

引理2.4.1　设 $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant p_m, p_1 > p_m$．令：

$$\beta_{\min} = -\log p_1, \quad \beta_{\max} = -\log p_m.$$

(i) $h:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 为严格增且严格凹的双映射；

(ii) $h':\mathbf{R} \to (\beta_{\min}, \beta_{\max})$ 为严格减的双映射；

(iii) 令 $h^*(\beta) = \inf\limits_{\alpha \in R}\{\alpha\beta - h(\alpha)\}$，则 h^* 为区间$(\beta_{\min}, \beta_{\max})$中的严格凹函数，且满足：

$$h^*(h'(\alpha)) = \alpha h'(\alpha) - h(\alpha),$$

$$h^*(h'(+\infty)) = \log m',$$

$$h^*(h'(-\infty)) = \log m'',$$

这里 $m' = \#\{j : p_j = p_m\}, m'' = \#\{j : p_j = p_1\}$.

证明　由 Hölder 不等式得，$h' > 0$，而 $h'' < 0$. 另外，易见 $h(+\infty) = -\infty, h(-\infty) = +\infty$. 从而得到(i).

如果将 $h'(\alpha)$ 以下面两种方式写出：

$$h'(\alpha) = \frac{-\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{p_j}{p_1}\right)^{\alpha}\log p_j}{\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{p_j}{p_1}\right)^{\alpha}},$$

$$h'(\alpha) = \frac{-\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{p_j}{p_m}\right)^{\alpha}\log p_j}{\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{p_j}{p_m}\right)^{\alpha}},$$

可以得到 $h'(+\infty) = \beta_{\min}, h'(-\infty) = \beta_{\max}$. 于是，我们证明了(ii).

正因为 h 严格凹而 h^* 为 h 的 Legendre 变换，所以 h^* 可以按命题中所述由 h 直接表述出来．为了得到其余等式，只需注意到下列等价关系：

$$h(\alpha) = -\alpha\beta_{\min} - \log m' + o(1), \qquad \alpha \to +\infty,$$

$$h(\alpha) = -\alpha\beta_{\max} - \log m'' + o(1), \qquad \alpha \to -\infty,$$

$$h'(\alpha) - \beta_{\min} \Leftrightarrow \frac{\#\{j : p_j = p'_{\max}\}}{\#\{j : p_j = p_{\max}\}}\left(\frac{p'_{\max}}{p_{\max}}\right)^{\alpha}\log\frac{p'_{\max}}{p_{\max}}, \alpha \to +\infty,$$

$$h'(\alpha) - \beta_{\max} \Leftrightarrow \frac{\#\{j : p_j = p'_{\min}\}}{\#\{j : p_j = p_{\min}\}}\left(\frac{p'_{\min}}{p_{\min}}\right)^{\alpha}\log\frac{p'_{\min}}{p_{\min}}, \alpha \to -\infty.$$

这里，$p_{\min} = p_m$，$p'_{\min}$是除去 $p_{\min}$之外 p_j 的最小值；$p_{\max} = p_1$，$p'_{\max}$是除去 $p_{\max}$之外 p_j 的最大值．

定理2.4.1　保留上述记号，设 ν 为系统(Σ, U, P)的不变测度，我们有：

$$\dim \nu = -\sum_{j=1}^{m} p_j \log p_j.$$

如果 $\beta \in [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$，则：

$$\dim E_\beta = \inf_{\alpha\in\mathbf{R}}\{\alpha\beta - h(\alpha)\}; \tag{2.4.3}$$

如果 $\beta \notin [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$，则 $E_\beta = \varnothing$.

证明 任给 $n \geqslant 1$,定义 $\xi_n: \Sigma \to \{1,2,\cdots,m\}$ 为 $\xi_n(\sigma)=\sigma_n$,序列 $\{\xi_n\}$ 为概率空间 (Σ,ν) 上独立同分布的随机变量. 根据强大数定理,有:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log \nu(I_n(\sigma))}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_{\xi_1}+\cdots+\log p_{\xi_n}}{n}$$

$$=\sum_{j=1}^{m} p_j\log p_j, \tag{2.4.4}$$

对 ν 几乎所有的 σ 成立. 从而,根据测度的维数公式得到本定理的第一个等式. 注意,根据我们引入的超度量,$I_n(\sigma)$ 的半径为 e^{-n}.

对于任意固定的 $\alpha \in \mathbf{R}$,考虑概率向量:

$$P_\alpha=\left(\frac{p_1^\alpha}{p(\alpha)},\cdots,\frac{p_m^\alpha}{p(\alpha)}\right),$$

记系统 (Σ,U,P_α) 的不变测度为 ν_α,根据上面所证明的维数公式(应用于 ν_α),我们有:

$$\dim\nu_\alpha=-\frac{\alpha}{p(\alpha)}\sum_{j=1}^{m}p_j^\alpha\log p_j+\log p(\alpha)$$

$$=\alpha h'(\alpha)-h(\alpha).$$

测度 ν 和 ν_α 均为乘积测度,从它们的定义出发,容易得到下面关系式:

$$D(\nu_\alpha,\sigma)=\alpha D(\nu,\sigma)-h(\alpha).$$

假定 $\alpha\neq 0$,根据上述关系式,ν 的奇点集 $E_{h'(\alpha)}$ 可由 ν_α 表示出来:

$$E_{h'(\alpha)}=\{\sigma\in\Sigma: D(\nu_\alpha,\sigma)=\alpha h'(\alpha)-h(\alpha)\}.$$

由于 $\alpha h'(\alpha)-h(\alpha)$ 等于 ν_α 的维数,$E_{h'(\alpha)}$ 是 ν_α 的 Borel 支集,即 $\nu_\alpha(E_{h'(\alpha)})=1$,故由 Billingsley 定理得:

$$\dim E_{h'(\alpha)}=\alpha h'(\alpha)-h(\alpha).$$

假定 $\alpha=0$,则有:

$$h(0)=-\log m,$$

$$h'(0)=-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\log p_j,$$

而 ν_0 为 Σ 上的 Haar 测度. 显然,$\nu_0(E_{h'(0)})=1$,故 $\dim E_{h'(0)}=\log m\,(=0h'(0)-h(0))$,于是,$\beta\in(\beta_{\min},\beta_{\max})$ 的情形已经证明.

现在来证明 $\dim E_{\beta_{\min}}=\log m'$. 不等式 $\dim E_{\beta_{\min}}\geqslant\log m'$ 是显然的,因为 $E_{\beta_{\min}}$ 包含 Cantor 集 $\{\sigma:\sigma_j=p_m,\forall j\geqslant 1\}$,而该集的维数为 $\log m'$. 另一方面,

任给 $\varepsilon > 0$ 和 $\alpha > 0$，如果 $\sigma \in E_{\beta_{\min}}$，由于 $\beta_{\min} < h'(\alpha)$，当 n 充分大时，有：

$$e^{-nh'(\alpha)} < \prod_{j=1}^{n} p_{\sigma_j}.$$

考虑所有满足上述不等式的 $I_n(\sigma)$ 构成的族，这是 $E_{\beta_{\min}}$ 的一个 Vitali 覆盖，故任给 $\delta > 0$，可以找到一个互不相交的子族 $\{I_n(\sigma)\}$，使得 $\dim I_n(\sigma) < \delta$，而 $\{I_{n-2}(\sigma)\}$ 覆盖 $E_{\beta_{\min}}$，于是，

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma}[\dim I_n(\sigma)]^{\alpha h'(\alpha)-h(\alpha)} &\leqslant C\sum_{\sigma}\prod_{j=1}^{n}\frac{p_{\sigma_j}^{\alpha}}{p(\alpha)}\\ &\leqslant C\,\nu_{\alpha}(\Sigma) < \infty,\end{aligned}$$

因此，$\dim E_{\beta_{\min}} \leqslant \alpha h'(\alpha) - h(\alpha) = h^{*}(\alpha)$，$\forall \alpha$．故由引理得 $\dim E_{\beta_{\min}} \leqslant h^{*}(+\infty) - \log m'$．

同理可证 $\dim E_{\beta_{\max}} = \log m''$．

定理 2.4.1 中的最后一个结论可由下式推出：

$$(\min p_j)^n \leqslant \nu(I_n(\sigma)) \leqslant (\max p_j)^n.$$

3.　$\mathbf{R}^d$ 上的自相似的测度

现在再来讨论 $\mathbf{R}^d$ 上的自相似测度．我们假定系统$(\mathbf{R}^d, W, P)$满足开集条件．如果再假定系统的压缩系数相同，即 $s_1 = s_2 = \cdots = s_m$，则由符号系统的有关结果，可立即推出 $\mathbf{R}^d$ 上自相似测度的重分形谱．为此，只需建立吸引集 A 与符号空间 Σ 之间的下述关系．该关系即使在压缩系数不相同的情况下，也是解决问题的关键．

命题 2.4.2　考虑系统$(\mathbf{R}^d, W, P)$，假定吸引集 A 满足 $w_j(A) \cap w_k(A) = \varnothing\ (\forall j \neq k)$，则存在常数 $c > 0$ 使得：

$$\begin{aligned}c^{-1}s_{\sigma_1}\cdots s_{\sigma_n(\sigma,\tau)} &\leqslant \|\Phi(\sigma) - \Phi(\tau)\|\\ &\leqslant c s_{\sigma_1}\cdots s_{\sigma_n(\sigma,\tau)},\end{aligned}$$

这里 Φ 是命题2.4.1 中定义的映射，$n(\sigma,\tau) = \sup\{k : \sigma_k = \tau_k\}$．

证明　在命题的假定下，$\Phi: \Sigma \to A$ 为双射．依 Φ 的定义有：

$$\Phi(\sigma) = w_{\sigma_1}\circ\cdots\circ w_{\sigma_n}(z_1),$$

$$\Phi(\tau) = w_{\tau_1}\circ\cdots\circ w_{\tau_n}(z_2),$$

其中 $n = n(\sigma,\tau)$，而且有：

$$z_1 = \lim_{p\to\infty} w_{\sigma_{n+1}}(z) \circ \cdots \circ w_{\sigma_{n+p}}(z),$$
$$z_2 = \lim_{p\to\infty} w_{\tau_{n+1}}(z) \circ \cdots \circ w_{\tau_{n+p}}(z),$$

可取 $z\in A$. 由于 z_1 和 z_2 分别属于 A 的两个不同的部分 $w_{\sigma_{n+1}}(A)$ 和 $w_{\tau_{n+1}}(A)$，故有：

$$\delta \leqslant \| z_1 - z_2 \| \leqslant \Delta,$$

这里 δ 为 $\inf_{j\neq k}\{d(w_j(A), w_k(A))\}$，$\Delta$ 为 A 的直径．利用 $\{w_j\}$ 的自相似性，立即可得所要证明的不等式．我们可取 $C=\max\{\Delta, \delta+1\}$.

特别地，如果 $s_1=s_2=\cdots=s_m=s$，则 Φ 是双 Lipschitz 映射，即：

$$\| \Phi(\sigma) - \Phi(\tau) \| \approx d(\sigma,\tau)^{\log s}.$$

因此，

$$\dim\Phi(E) = \frac{1}{\log s}\dim E, \qquad \forall E \subset \Sigma, \tag{2.4.5}$$

$$D(\mu,x) = \frac{1}{-\log s}D(\nu,\Phi^{-1}(x)), \qquad \forall x \in A. \tag{2.4.6}$$

由(2.4.5)和(2.4.6)式及 ν 的重分形谱，立即可得：

$$\dim \mu = \frac{1}{\log s}\sum_{j=1}^{m} p_j \log p_j,$$

$$\dim E_\beta = \inf_\alpha\{\alpha\beta - h(\alpha)\},$$

这里，

$$h(\alpha) = \frac{1}{\log s}\log\left(\sum_{j=1}^{m} p_j^\alpha\right).$$

如果条件 $s_1=s_2=\cdots=s_m$ 不满足，映射 Φ 不再是双 Lipschitz 的，我们必须做更细致的工作，并且函数 h 也要重新定义．

定义2.4.1 $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 由下述方程的解给出：

$$\sum_{j=1}^{m} p_j^\alpha s_j^{h(\alpha)} = 1.$$

易见，h 的定义是有意义的，它还是严格增的．通过简单计算，我们得到：

$$h'(\alpha) = \frac{\sum_{j=1}^{m} p_j^\alpha s_j^{-h(\alpha)}\log p_j}{\sum_{j=1}^{m} p_j^\alpha s_j^{h(\alpha)}\log s_j},$$

$$h''(\alpha) = \frac{\sum_{j=1}^{m} p_j^{\alpha} s_j^{-h(\alpha)} [\log p_j - h'(\alpha) \log s_j]^2}{\sum_{j=1}^{m} p_j^{\alpha} s_j^{-h(\alpha)} \log s_j}.$$

因 $h''(\alpha) \leqslant 0$，h 是凹的．如果对于某个 $\alpha_0 \in \mathbf{R}$，有 $h''(\alpha_0) = 0$，这意味着：

$$\frac{\log p_1}{\log s_1} = \cdots = \frac{\log p_m}{\log s_m} = h'(\alpha_0).$$

换言之，$p_j = s_j^{h'(\alpha_0)} (1 \leqslant j \leqslant m)$．这一事实等价于 $h(\alpha) = D(\alpha - 1)$，其中 D 是所谓的自相似维数，它由下式唯一确定：

$$\sum_{j=1}^{m} s_j^D = 1,$$

此时的不变测度是 D 维的 Hausdorff 测度在吸引集 A 上的限制．它在每一点的 Lipschitz 指数恒等于 D．所以，此时的不变测度不是重分形的．接下来，我们只需讨论 h 为严格凹函数的情形．

引理2.4.2　令 $\rho_j = \log p_j / \log s_j$，假定 $\beta_{\min} = \rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant \cdots \leqslant \rho_m = \beta_{\max}$，且 $\beta_{\min} < \beta_{\max}$．

(i) $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 为严格增且严格凹的双映射；

(ii) $h': \mathbf{R} \to (\beta_{\min}, \beta_{\max})$ 为严格减的双映射；

(iii) 令 $h^*(\beta) = \inf\limits_{\alpha \in \mathbf{R}} \{\alpha\beta - h(\alpha)\}$，则 h^* 为区间 $(\beta_{\min}, \beta_{\max})$ 上的严格凹函数，且满足：

$$h^*(h'(\alpha)) = \alpha h'(\alpha) - h(\alpha),$$
$$h^*(h'(+\infty)) = D', \quad h^*(h'(-\infty)) = D'',$$

这里 D' 和 D'' 由下列等式确定：

$$\sum_{j: \rho_j = \rho_1} s_j^{D'} = 1,$$
$$\sum_{j: \rho_j = \rho_m} s_j^{D''} = 1.$$

该引理的证明与引理2.4.1相同．

定理2.4.2　设系统 $(\mathbf{R}^d, W, P)$ 的吸引集为 A，不变测度为 μ，假定 $w_j(A) \cap w_k(A) = \varnothing (\forall j \neq j)$，$\rho_1 \leqslant \cdots \leqslant \rho_m$ 而 $\rho_1 < \rho_m$．那么，

$$\dim\mu = \frac{\sum_{j=1}^{m} p_j \log p_j}{\sum_{j=1}^{m} p_j \log s_j}.$$

如果 $\beta \in [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$，则：

$$\dim E_\beta = \inf_{\alpha \in \mathbf{R}} \{\alpha \beta - h(\alpha)\},$$

如果 $\beta \notin [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$，则：

$$E_\beta = \varnothing.$$

证明 令：

$$F_\beta = \{\sigma \in \Sigma : D(\mu, \Phi(\sigma)) = \beta\},$$

则 $E_\beta = \Phi(F_\beta)$. 我们将对 F_β 而不是E_β进行讨论．固定 $\sigma \in \Sigma$，由命题2.4.1得：

$$\mu(B_r(\Phi(\sigma))) = \nu\{\tau : \| \Phi(\tau) - \Phi(\sigma) \| < r\}.$$

应用命题2.4.2，我们有：

$$\nu(I_{\bar{n}(\sigma,r)}(\sigma)) \leqslant \mu(B_r(\Phi(\sigma))) \leqslant \nu(I_{\underline{n}(\sigma,r)}(\sigma)),$$

这里，

$$\bar{n}(\sigma, r) = \inf\{n : s_{\sigma_1} \cdots s_{\sigma_n} \leqslant c\, r\},$$

$$\underline{n}(\sigma, r) = \sup\{n : s_{\sigma_1} \cdots s_{\sigma_n} \geqslant c^{-1} r\}.$$

注意到：

$$0 \leqslant \bar{n}(\sigma, r) - \underline{n}(\sigma, r) = O(1),$$

其中常数 $O(1)$ 既不依赖 σ 也不依赖 r. 由此可得，与 ν 一样，测度 μ 满足 $\mu(B_{2r}(x)) = O(\mu(B_r(x)))$. 因此，

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{r\to0}\frac{\log\nu(I_{\underline{n}(\sigma,r)}(\sigma))}{\log r} &\leqslant \underline{\lim}_{r\to0}\frac{\log\mu(B_r(\Phi(\sigma)))}{\log r}\\ &\leqslant \overline{\lim}_{r\to0}\frac{\log\mu(B_r(\Phi(\sigma)))}{\log r}\\ &\leqslant \overline{\lim}_{r\to0}\frac{\log\nu(I_{\bar{n}(\sigma,r)}(\sigma))}{\log r}.\end{aligned}$$

根据强大数定理，对 ν − 几乎所有 σ 满足：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log s_{\sigma_k} = \sum_{j=1}^{m} p_j \log s_j,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\nu(I_n(\sigma))}{n}=\sum_{j=1}^{m}p_j\log p_j.$$

故对 ν - 几乎所有的 σ 满足：

$$\lim_{r\to 0}\frac{\log r}{\underline{n}(\sigma,r)}=\lim_{r\to 0}\frac{\log r}{\bar{n}(\sigma,r)}$$

$$=\sum_{j=1}^{m}p_j\log s_j,$$

$$\lim_{r\to 0}\frac{\log\nu(I_{\underline{n}(\sigma,r)}(\sigma))}{\log r}=\lim_{r\to 0}\frac{\log\nu(I_{\bar{n}(\sigma,r)}(\sigma))}{\log r}$$

$$=\frac{\sum_{j=1}^{m}p_j\log p_j}{\sum_{j=1}^{m}p_j\log s_j}.$$

从而，对 ν - 几乎所有的 σ 有：

$$D(\mu,\Phi(\sigma))=\frac{\sum_{j=1}^{m}p_j\log p_j}{\sum_{j=1}^{m}p_j\log s_j}.$$

于是，由命题2.4.1 导出，对 μ - 几乎所有的 x，有：

$$D(\mu,x)=\frac{\sum_{j=1}^{m}p_j\log p_j}{\sum_{j=1}^{m}p_j\log s_j}.$$

这样，我们就得到 μ 的维数。

设 $P_\alpha=(p_1^\alpha s_1^{-h(\alpha)},\cdots,p_m^\alpha s_m^{-h(\alpha)})$. 令 ν_α 为系统 (Σ,U,P_α) 的不变测度，μ_α 为 ν_α 在映射 Φ 下的像。μ_α 正是系统 (X,W,P_α) 的不变测度。

与上面同样的方法，可以证明：ν_α - 几乎处处有：

$$\lim_{r\to 0}\frac{\log r}{\underline{n}(\sigma,r)}=\lim_{r\to 0}\frac{\log r}{\bar{n}(\sigma,r)}$$

$$=\sum_{j=1}^{m}p_j^\alpha s_j^{\,h(\alpha)}\log s_j.$$

考虑：

$$R = \left\{\sigma \in \Sigma: \lim_{r\to 0}\frac{\log r}{\underline{n}(\sigma,r)} = \lim_{r\to 0}\frac{\log r}{\overline{n}(\sigma,r)} = l(\sigma) \neq 0\right\},$$

可以把 $\Phi(R)$ 视为吸引集 A 中的“正则点”. 上述等式蕴含 $\nu_\alpha(R) = 1$，从而 $\mu_\alpha(\Phi(R)) = 1$. 任给 $\sigma \in R$, $D(\mu_\alpha,\Phi(\sigma))$ 与 $D(\mu,\Phi(\sigma))$ 具有下列关系：

$$D(\mu_\alpha,\Phi(\sigma)) = \alpha D(\mu,\Phi(\sigma)) - h(\alpha).$$

事实上，

$$\lim_{r\to 0}\frac{\log\ \mu(B_r(\Phi(\sigma)))}{\log\ r} = \frac{1}{\rho(\sigma)}\lim_{n\to\infty}\frac{\log\ \nu(I_n(\sigma))}{n} = \frac{1}{\rho(\sigma)}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\log\ p_{\sigma_j}, \tag{2.4.7}$$

$$\lim_{r\to 0}\frac{\log\mu_\alpha(B_r(\Phi(\sigma)))}{\log r} = \frac{1}{\rho(\sigma)}\lim_{n\to\infty}\frac{\log\nu_\sigma(I_n(\sigma))}{n} = \frac{1}{\rho(\sigma)}\left\{\alpha\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\log p_{\sigma_j} - h(\alpha)\rho(\sigma)\right\}. \tag{2.4.8}$$

上面的 n 成为 $\overline{n}(\sigma,r)$ 或为 $\underline{n}(\sigma,r)$.

我们已经证明，ν_α 几乎处处有：

$$l(\sigma) = \sum_{j=1}^{m} p_j^\alpha s_j^{-h(\alpha)}\log s_j. \tag{2.4.9}$$

根据(2.4.9)式及上述 $D(\mu_\alpha,\Phi(\Sigma))$ 与 $\log p_{\sigma_j}$ 之间的关系，可得到 ν_α − 几乎处处有：

$$D(\mu_\alpha,\Phi(\sigma)) = \alpha h'(\alpha) - h(\alpha).$$

也就是说，μ_α − 几乎处处有：

$$D(\mu_\alpha,x) = \alpha h'(\alpha) - h(\alpha).$$

假定 $\alpha \neq 0$($\alpha = 0$ 为平凡情形)，应用 $D(\mu_\alpha,\Phi(\sigma))$ 与 $D(\mu,\Phi(\sigma))$ 之间的关系，我们有：对 $x \in \Phi(R) \bigcap E_{h'(\alpha)}$,

$$D(\mu_\alpha,x) = \alpha h'(\alpha) - h(\alpha).$$

依据 Billingsley 定理，

$$
\begin{aligned}
\dim E_{h'(\alpha)} &\geqslant \dim(\Phi(R) \cap E_{h'(\alpha)}) \\
&= \alpha h'(\alpha) - h(\alpha).
\end{aligned}
$$

为证反向不等式，首先注意到 $\forall \varepsilon > 0, x \in E_{h'(\alpha)}$，不等式：

$$
r^{h'(\alpha-\varepsilon)} < \mu(B_r(x)) < r^{h'(\alpha+\varepsilon)}
$$

对充分小的 r 成立．所有这些球 $B_r(x)$ 构成 $E_{h'(\alpha)}$ 的一个 Vitali 覆盖，任给 $\delta > 0$，可以找到覆盖中的一列半径不超过 δ 的互不相交的球，将它们放大 4 倍，则成为 $E_{h'(\alpha)}$ 的一个覆盖．令 $B_r(x)$ 为这一列球中的一个，$x = \Phi(\sigma)$，则上述不等式蕴含：

$$
\begin{aligned}
r^{h'(\alpha-\varepsilon)} &< \nu(I_{\bar{n}(\sigma,r)}(\sigma)) \\
&\leqslant M\nu(I_{\underline{n}(\sigma,r)}(\sigma)) \\
&< Mr^{h'(\alpha+\varepsilon)},
\end{aligned} \tag{2.4.10}
$$

这里 M 为常数．设 $\alpha - \varepsilon > 0$，由(2.4.10)的第一个不等式，得：

$$
\begin{aligned}
\mu_{\alpha-\varepsilon}(B_r(x)) &\geqslant \nu_{\alpha-\varepsilon}(I_{n(\sigma,r)}(\sigma)) \\
&= \prod_{j=1}^{n(\sigma,r)} p_{\sigma_j}^{\alpha-\varepsilon} s_j^{h(\alpha-\varepsilon)} \\
&\geqslant C \prod_{j=1}^{\underline{n}(\sigma,r)} p_{\sigma_j}^{\alpha-\varepsilon} s_j^{h(\alpha-\varepsilon)} \\
&\geqslant C' r^{(\alpha-\varepsilon)h'(\alpha-\varepsilon)-h(\alpha-\varepsilon)}.
\end{aligned} \tag{2.4.11}
$$

如果 $\alpha - \varepsilon < 0$，可以得到类似结果．上述不等式蕴含：

$$
\dim E_{h'(\alpha)} \leqslant (\alpha - \varepsilon)h'(\alpha - \varepsilon) - h(\alpha - \varepsilon), \qquad \forall \varepsilon > 0.
$$

故 $\dim E_{h'(\alpha)} \leqslant \alpha h'(\alpha) - h(\alpha)$．这样，就证明了 $\beta \in (\beta_{\min}, \beta_{\max})$ 时的结果．当 β 为该区间的端点时，可以模仿符号系统而加以证明．

参考文献

[1]E. Seneta, Mon - Negative Matrices and Markov Chains, Springer - Verlag, 1981

[2]K. J. Falconer, Fractal Geometry, John Wiley & Sons, 1990

[3]J. P. Kahane, Some Random Series of Functions, Ist ed., Heath, 1968, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1985

[4]K. Petersen, Ergodic Theory, Cambridge Univ. Press, 1983

[5] P. Walters, An Introduction to Ergodic Theory, Graduate Texts in Mathematics 79, Springer-Verlag, 1982

[6]A. H. Fan, Décompositions de Mesures et Recouverments Aléatoires, Publication D'Orsay, 1989(3)

[7]J. P. Kahane, Décompositions des Mesures Selon la Dimensiion, C. R. Acad. Sci., Paris, 1989 (306): 107—110

[8]A. H. Fan, Sur Les Dimensions de Mesures, Studia Math., 1994, 111(1), 1—17

[9]C. C. Graham & O. C. Mcgehee, Essays in Commutative Harmonic Analysis, Springer - Verlag, 1979

[10]B. Host, J. F. Méla & F. Parreau, Analyse Harmonique des Mesures, Astérisque, 1986: 135—136

[11]A. H. Fan, Quelques Propriétés de Produits de Riesz, Bull. Sci. Math., 1993, 117(3): 421—439

[12]A. H. Fan, Une Formule Approximative de Dimension Pour Certains Produits de Riesz, Mh. Math., 1994(118): 83—89

[13]A. H. Fan, Ergodicity Unidimensionality and Multifractality of Self - Similar Measures, Kyushu J. Math., 1995

[14]A. H. Fan, Multifractal Analysis of Infinite Products, J. Stat Phys., 1996

[15]A. Garcia, Entropy and Singularity of Infinite Convolutions, Pacific J. Math., 1963(13): 1157—1169

[16]S. Geromino & D. P. Hardin, An Exact Formula for the Measure Dimension Associated with a Class of Piecewise Linear Maps, Constr. Approx., 1988(5): 89—98

[17]J. Peyriere, Etude de Quelques Propriétés des Produits de Riesz, Riesz Ann, Inst. Fourier, 1975, 25(2): 127—169

[18]R. S. Strichartz, Self Similar Measures and Their Fourier Transtforms, Indiana Univ. Math. J., 1989(39): 155—186

[19]A. H. Fan, A Proof of the Ruelle Operator Theorem, Reviews in Math. Phys., 1995, 7(8): 1241—1247

[20]D. Rel, Fractal and Multifractals, Zeit. Naturfofsch. 1988, A(43): 1154 1175

[21]P. Williams, Composition of Contractions, Bol. Soc. Brasil. Math., 1971(29): 55 - 59

[22]R. Benzi, G. Paladin, G. Parisi & A. Vulpiani, On the Multifractal Nature of Fully Developed Turbulence and Chaotic Systems, J. Phys, 1984, A(17): 3521—3531

[23]U. Frisch & G. Parisi, On the Singularity Structure of Fully Developed Turbulence, Appendix to U. Frisch, Hully Developed Turbulence and Intermittency, Turbulence and Pre-

dictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics, Proc. Int. Sch. Phys., Enrico Fermi Course LXXXVIII, North Holland, Amsterdam, 1985

[24] T. C. Hasley, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia & B. J. Shraiman, Fractal Measures and Their Singularities: The Characterization of Strange Sets, Phys. Rev., 1986, A(33): 1141—1151

[25] M. Barnsley, Fractals Everywhere, Academic Press, 1989

[26] M. Hata, On the Structure of Self-Similar Sets, J. Appl. Math., Japan, 1985(2): 381-414

[27] R. Bowen, Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms, Springer-Berlin, 1975: 470

[28] P. Collet, J. L. Lebowitz & A. Porzio, The Dimension Spectrum of Some Dynamical Systems, J. Stat. Phys., 1987(47): 609—644

[29] A. H. Fan, α-Dimensionalité Des Mesures Auto-Similaires, C. R. Acad. Sci., Paris, 1993, I(316): 647—652

[30] C. Cutler, Connecting Ergodicity and Dimension in Dynamical Systems, Ergodic Th. Dyn. Sys., 1990(10): 451—462

[31] J. P. Eckman & D. Ruelle, Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors, Rev. Mod. Phy., 1985, 57(3): 617—656

[32] G. Brown & A. H. Dooley, Odometer Actions on G-Measures, Ergodic Th. Dyn. Sys., 1991(11): 279—307

[33] G. Brown, G. Michon & J. Peyriere, On the Multifractal Analysis of Mesures, J. Stat. Phys., 1992, 66(3/4): 775—790

[34] R. Cawley & R. D. Mauldin, Multifractal Decompositions of Moran Fractals, Advances in Mathematics, 1992(92): 196—236

[35] R. V. Chaocon & D. S. Ornstein, A General Ergodic Theorem, Illinois J. Math., 1960(4): 153—160

[36] R. Coifman & G. Weiss, Analyse Harmonique non Commutative Sur Certaines Espaces Homogenes, Springer-Verlag, 1971: 244

[37] A. H. Fan, On Ergodicity and Unidimensionality, Kyushu J. Math., 1994, 48(2): 249—255

[38] A. H. Fan, Analyse Multifractale de Certaines Produites de Riesz Avec Phases, C. R. Acad. Sci., Paris, 1995, I(321): 399—404

[39] M. Hata, On Some Properties of Set Dynamical Systems, Proc. Japan Acad., Ser. A. Math. Sci., 1985(61), 99-102

[40]M.F.Barnsley & S.G.Demko,Iterated Function Systems and the Global Constructions of Fractals,Proc.R.Soc.,London,1985,A(399):243—275

[41]R.Bohr & D.Rand,The Entropy Function for Characteristic Exponents,Physica 1987,D(25):387—398

[42]J.E.Hutchinson,Fractals and Self - Similarity,Indiana Univ.Math.J.,1981(30):713—747

[43]B.Jamison,Asymptotic Behavior of Successive Iterates of Continuous Functions Under a Markov Operator,J.Math.Analysis and Applications,1964(9):203—214

[44]J.P.Kahane,Intervalles Alatoires et Dcompositions des Mesures,C.R.Acad.Sci.,Paris,1987(304):551—554

[45]J.P.Kahane & Y.Katznelson,Dcompositions des Mesures Selon la Dimension,Colloq.Math.,1990,LVIII(2):269—279

[46]J.P.Kahane & R.Salem,Sur la Convolution D'une Infinit de Distributiions de Bernoulli,Colloq.Math.,1958(6):193—202

[47]J.P.Kahane & R.Salem,Ensembles Parfaits et Series Trigonometriques,Paris,Hermann,1963

[48]M.Keane,Strongly Mixing G - Measures,Inventiones Math.,1974(16):309—324

[49]U.Krengel,Ergodic Theorems,de Gruyter,Berlin,1985

[50]F.Ledrappier,Principe Variationnel et Systèmes Dynamiques Symboliques,Z.Wahrscheinlichkeitstheorie Verw.Geb.,1974(30):185—202

[51]B.Mandelbrot,Intermittent Turbulence in Self - Similar Cascades: Divergence of High Moments and Dimension of the Carrier,J.Fluid Mech.,1974(62):331—358

[52]J.Peyriere,Mesures Singulières Associées à des découpages Aléatories D'un Hypercube,Colloq.Math.,1987(LI):267—276

[53]F.Przytyski & M.Urbanski,On the Hausdorff Dimension of Some Fractal Sets,Studia Math.,1989(93):155—186

[54]D.Rand,The Singularity Spectum $f(\alpha)$ for Cookie Cutters,Ergodic Th.Dyn.Sys.,1989(9):527—541

[55]D.Revuz,Markov Chains,North Holland,1984

[56]W.Rudin,Functional Analysis,2nd Edition,John.Wiley & Sons,1991

[57]P.Assouad,Plongements Lipschitziens Dans,$\mathbf{R}^n$,Bull.Sci.Math.,1983(111):429—448

[58]T.Tel,Fractals and Multifractals,Zeit.Naturforsch.,1988,A(43):1154—1175

[59]C.Tricot,Two Definitions of Fractional Dimension,Math.Proc.Camb.Phil.Soc.,1982(91):57—74

[60] M. F. Barnsley, S. G., Demko, J. H. Elton & J. S. Geromino, Invariant Measures for Markov Processes Arising from Iterated Function Systems with Place－Dependent Probabilities, Ann. Inst. H. Poincaré, 1988, 24(3): 367—394

[61] P. Bilingsley, Ergodic Theory and Information, John. Wiley & Sons, 1965

第三章
结合 1 维准周期链的分形结构

3.1 引　论

自从 1984 年 D. Schechtman 等人[1] 在急冷的铝锰合金电子衍射中发现五次旋转对称以来，准晶的研究在国际上迅速成为一个热门课题，与其相应的非周期结构的研究也不断深入.

我们知道，诸如五次旋转对称、二十面体对称等，分别在 $\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$ 中的格子里都是与平移对称不相容的，从而其花样为非周期的. 与长程有序相对应，我们面临一类所谓“局部有序”结构，一般来说，设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集，要求它满足：

(1) 离散性，即 D 中任意两点间有一个最小的距离.

(2) 相对稠密性，即存在 $\delta > 0$，$\mathbf{R}^n$ 中任何以 δ 为半径的球至少含有 D 中的一点.

这样的点集又称为 Delone 系统.

我们在下面的讨论中，主要涉及两种类型的非周期结构：第一种是早在准晶发现之前就由 Penrose 给出，按照所谓“膨胀律”，将几种几何花样(pattern)铺满整个空间，如著名的 Penrose 图(它是由角度为 36° 倍数的两种三角形经膨胀拼合而成，这是一个 $2D$ 的例子). 在 $1D$ 的情形，它可以是 Fibonacci 链；而在 $3D$ 的情形，它又可以是二十面体对称图样. 第二种是由 N. G. de Bruijn 给出的所谓“截割投影”方法[2-7]，它是由高

维空间的周期对象在低维"物理空间"的投影产生的准周期结构.这是两种完全不同的方法.事实上,第一类非周期结构的衍射谱,即 Fourier 变换谱呈现多样性.一般性的结论尚未获得.而第二类则为所谓准周期结构,它们的 Fourier 变换谱由 Bragg 峰构成,是一个 δ - 函数,支撑在其倒易空间里具有有限基的整数模上.然而在某些条件下,由膨胀律生成的非周期结构也是准周期的,也是可以由截割投影产生的.

3.1.1　代换及代换序列

1.　代换

回顾代换的概念.令 $\mathscr{A}=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是一个称为字母表的有限集,$|\mathscr{A}|=n$ 表示 $\mathscr{A}$ 中字母的个数.$\mathscr{A}$ 上的有限序列 $x=x_1x_2\cdots x_k(x_i\in\mathscr{A},1\leqslant i\leqslant k)$ 称为 $\mathscr{A}$ 上的一个词,k 称为词 x 的长度,记为 $|x|$.$\mathscr{A}$ 上所有词的集合记为 $\mathscr{A}^*$.如果 $w_1,w_2\in\mathscr{A}^*$,按照这两个词头尾的连接,我们定义 $\mathscr{A}^*$ 的乘法 $w=w_1w_2$.引进空词 ε,即不含任何字母的元素,那么 $\mathscr{A}^*$ 按上述乘法形成一幺半群.

集 $\mathscr{A}$ 上的一个代换 σ 是 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{A}^*$ 的一个映射.将 σ 延拓到 $\mathscr{A}^*$ 上,使得对任意 $\mu,\nu\in\mathscr{A}^*$,有 $\sigma(\mu\nu)=\sigma(\mu)\sigma(\nu)$,则 σ 又可作为 $\mathscr{A}^*$ 上的一个自同态.在下面需要的时候,还要考虑由 $\mathscr{A}$ 生成的自由群 $\mathscr{F}$.在 $\mathscr{F}$ 中,a,b 的逆元分别为 a^{-1},b^{-1}.引入恰当的等价类,可将 $\mathscr{A}$ 嵌入到 $\mathscr{F}$ 中,这时 σ 又可延拓成 $\mathscr{F}$ 的自同态.如果存在 τ,使 $\sigma\tau=id$ 为恒等映射,则称 σ 是可逆的.它也是 $\mathscr{F}$ 的一个自同构.关于可逆代换的性质,可参考文献[8].

我们把 $|\mathscr{A}|\times|\mathscr{A}|$ 方阵:

$$M_\sigma=(\text{字母 } a_j \text{ 出现在 } \sigma(a_i) \text{ 中的个数})_{1\leqslant i,j\leqslant|\mathscr{A}|} \tag{3.1.1}$$

称为结合代换 σ 的代换矩阵.例如:

(1) Fibonacci 代换:$\mathscr{A}=\{a,b\},\sigma_F(a)=ab,\sigma_F(b)=a$.

(2) Thue - Morse 代换:$\mathscr{A}=\{a,b\},\sigma_M:a\to ab,b\to ba$.

(3) 圆代换:$\mathscr{A}=\{a,b,c\},\sigma_C:a\to cac,b\to accac,c\to abcac$.

(4) Rudin - Shapiro 代换:$\mathscr{A}=\{a,b,c,d\},\sigma_R:a\to ac,b\to dc,c\to ab,$

$b \to db$.

它们的代换矩阵分别为：

$$M_{\sigma_F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M_{\sigma_M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_{\sigma_C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad M_{\sigma_R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2．代换序列

所有 $\mathscr{A}$ 上的无穷序列 $x = x_1x_2\cdots x_k\cdots(x_i \in \mathscr{A}, i \geqslant 1)$的集合记为 $\mathscr{A}^{\mathbf{N}}$，这是一个符号空间，序列 x 也称为无限词．将 σ 进一步延拓到 $\mathscr{A}^{\mathbf{N}}$，使$\sigma(x) = \sigma(x_1)\sigma(x_2)\cdots\sigma(x_k)\cdots$．考虑 σ 的迭代 $\sigma^n(w) = \sigma(\sigma_{n-1}(w))$，$w \in \mathscr{A}^*$．我们看到，如果 a 是$\sigma(a)$的前缀，即存在 $u \in \mathscr{A}$；使得$\sigma(a) = au$，那么$\sigma^n(a) = \sigma^{n-1}(\sigma(a)) = \sigma^{n-1}(a)\sigma^{n-1}(u)$，即$\sigma^{n-1}(a)$是 $\sigma^n(a)$的前缀．按照通常的方式给出 $\mathscr{A}^{\mathbf{N}}$ 的拓扑[9,10]，则 $s = \lim\limits_{n \to \infty}\sigma^n(a)$，$a \in \mathscr{A}$ 是 σ 的一个不动点，记为 σ^∞，称为由代换 σ 生成的序列，简称为代换序列．由于$\sigma(s) = s$，可见代换序列 s 具有经"膨胀" σ 作用不变的性质．在此意义下，s 是一个具有自相似结构的序列．例如对 Fibonacci 代换，我们有：

$$\begin{aligned} \sigma(a) &= ab, \\ \sigma^2(a) &= aba, \\ \sigma^3(a) &= abaab, \\ \sigma^4(a) &= abaababa, \\ &\cdots, \\ \sigma^\infty(a) &= abaababaabaab\cdots = s, \\ \sigma(s) &= s. \end{aligned}$$

令 $M = (m_{ij})_{n\times n}$ 是一个矩阵．如果 $m_{ij} \geqslant 0, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n$，如果存在 k，使 M^k 的所有元素为正，则称 M 是非负矩阵，如果存在 $n \in \mathbf{N}$，使 M_n 中每个元素均为严格正的，则称 M 为本原矩阵．如果一个代换矩阵是本原

的,则称相应的代换是本原代换.下面是关于非负矩阵的一个重要定理.

定理3.1.1（Perron－Frobenius定理）　设 M 是本原的非负矩阵,那么 M 必有一个正的单重特征值,相应于它的特征向量的每个分量是正的,而且这个特征值严格大于其他每个特征值的模.

以下我们考虑的代换均假定为本原的,并且总以 λ_1 表示它的最大正特征值.

对于 $w \in \mathscr{A}^*, a \in \mathscr{A}$,以 $|w|_a$ 表示 a 在 w 中出现的个数.令 $x = x_1x_2\cdots x_k\cdots$ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个无限词.它的长度为 k 的前缀 $x_1x_2\cdots x_k$,记为 $x^{(k)}$.对于 $a_i \in \mathscr{A}, 1 \leqslant i \leqslant |\mathscr{A}|$,如果极限

$$\rho_i = \lim_{k\to\infty} \frac{|x^{(k)}|_{a_i}}{k}$$

都存在,则 ρ_i 是 a_i 在 x 中出现的频率(也称为密度).

关于代换序列的密度,有如下结论:

本原代换序列存在一致频率,并且 $\rho = (\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n)$ 是它的代换矩阵最大正特征值的特征向量.

有关代换及代换序列的进一步的性质,可参考文献[9],[10].

3.1.2　截割投影方法

令 Λ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 n 维格子空间(例如 $\mathbf{Z}^n$). Π_k 是通过 $\mathbf{R}^n$ 原点 O 的 k 维超平面.如果 $\Lambda \cap \Pi_k = \{0\}$,则称 Π_k 是无理超平面.以 $\Pi_k^{\perp}$ 表示 Π_k 在 $\mathbf{R}^n$ 中的正交补,适当地选择 $\Pi_k^{\perp}$ 中的紧集 T,作出 $\mathbf{R}^n$ 中的超柱体 $W = T \oplus \Pi_k$,那么 $\Lambda \cap W$ 在 Π_k 中的射影为一个具有平移对称性的Delone系统. W 称为截割投影的窗口, Π_k 称为投影的物理空间.

1.　Fibonacci链——由黄金分割确定的1D截割投影

令 $r = (\sqrt{5} - 1)/2$ 为黄金分割数, $\alpha = r^{-1}$.

在 $\mathbf{R}^2$ 中取 $y = \alpha x$ 为物理空间 Π,取单位立方体在 $\Pi^{\perp}$ 上的射影为 T,即窗口 W 为 $y = \alpha x$ 及 $y = \alpha x + \alpha + 1$ 之间的区域,那么 W 中的格点在 $y = \alpha x$ 上的射影生成长短不一的两种线段组成的序列.其中 $W \cap \mathbf{Z}^2$ 为序列:

$$(x, y) = \left(\left[\frac{n}{\alpha+1}\right], n - \left[\frac{n}{\alpha+1}\right]\right),$$

这里$[x]$表示x的整数部分,它在Π上的射影为:

$$\left(\frac{x+\alpha y}{1+\alpha^2},\frac{\alpha x+\alpha^2 y}{1+\alpha^2}\right),$$

而射影点形成序列:

$$\begin{aligned}p_n &= \alpha n-(\alpha-1)\left[\frac{n}{\alpha+1}\right]\\ &=\frac{\alpha^2+1}{\alpha+1}n-(\alpha-1)\left\{\frac{n}{\alpha+1}\right\}.\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

这里$\{x\}$表示x的小数部分:$\{x\}=x-[x]$.

不难证明,通过适当的对应,该序列可由Fibonacci代换给出.

2.　五次对称的Penrose图

在$\mathbf{R}^5$中,窗口取作:

$$W=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbf{Z}^5:1\leqslant\sum_{k=1}^{5}x_k\leqslant 4\right\},$$

Π_2为通过原点、在以方向为(1, 1, 1, 1, 1)的轴旋转下不变的2维平面.

3.1.3　具有自相似结构的系统的分类性质

1.　Fourier变换

令D是一个Delone系统,它有密度分布,且是在D的点上权的Dirac δ函数的可数无穷和.可以首先近似地假定,所有的权都等于1.那么,分布$\rho(x)$可以写成:

$$\rho(x)=\sum_{\nu\in D}\delta(x-\nu),$$

这里$x\in\mathbf{R}^n$.这样形式的一个分布通常称为Dirac梳.它的Fourier变换$\tilde{\rho}(t)=\sum_{\nu\in D}\exp(2\pi it\cdot\nu)$与Dirac梳密切相关.

由截割投影方法产生的是准周期结构,由代换序列产生的非周期序列,因而可按其Fourier变换分成如下三类:

(1)它的Fourier变换为一个Dirac梳.这时它又被称为Poisson梳(一个特殊的情形是:它的Fourier变换谱是具有有限基的整数模,相应的非周期结构称为准周期的).

(2) 它的 Fourier 变换含有一个 Dirac 梳的连续部分.

(3) 它的 Fourier 变换含有"类似的"Dirac 梳. 它可以出现在它的谱具有奇异连续分支的情形.

2. 具有自相似结构的系统分类及性质

令 σ 是 $\mathscr{A}=\{a,b\}$ 上的代换，$\sigma^{\infty}(a)=s=\{s_k\}_{k\geq 1}, s_k\in\{a,b\}$ 是它的一个不动点. 我们给出如下相应的两个序列：

(1) 将 $s=\{s_k\}$ 中的 a,b 分别替换成 $1,-1$，我们得到抽象序列$\{\varepsilon_k\}$.

(2) 取长短不同的线段 d_a,d_b，在实线上按照 s 中的 a,b 依次分别搁置 d_a,d_b，我们得到节点序列$\{x_k\}_{k\geq 0}$，即：

$$x_0=0,$$

$$x_k-x_{k-1}=\begin{cases}d_a, & \text{如果 } s_k=a,\\ d_b, & \text{如果 } s_k=b.\end{cases} \tag{3.1.3}$$

$$\cdots$$

这样的序列称为链结构序列.

对应这两个序列，定义：

$$f_n(q)=\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k\exp(-iqk), \tag{3.1.4}$$

$$F_n(q)=\sum_{k=1}^{N}\exp(-iqx_k), \tag{3.1.5}$$

这里 $N=|\sigma^n(a)|$，它们结合振幅的结构因子定义为：

$$s_n(q)=\frac{|f_n(q)|^2}{N},\qquad s(q)=\lim_{n\to\infty}s_n(q), \tag{3.1.6}$$

$$S_n(q)=\frac{|F_n(q)|^2}{N},\qquad S(q)=\lim_{n\to\infty}S_n(q). \tag{3.1.7}$$

Bombieri－Taylor 定理[11]告诉我们，代换序列在什么时候可以是准周期的.

定理3.1.2 令 M_σ 是代换 σ 的矩阵. 如果 M_σ 的最大正特征值的模大于1，其他特征值的模小于1(即 M_σ 的特征值是 Pisot 数)，那么该代换序列的 Fourier 变换谱含有 Dirac 梳.

然而，在非 Pisot 数的情形，相应的 Fourier 变换呈现复杂的性态，我们将在3.3节中讨论它的重分形标度性质.

如果代换矩阵的行列式为 ± 1，那么它们的 Fourier 谱是具有有限基的整数模，即为 Bragg 衍射谱．我们把这样的准周期结构嵌入高维格子空间的带状区域里，即从一个周期的"原子表面"有界点阵，通过截割的方法生成这样的准周期结构．进而，我们通过对原子表面的分形结构的分析，讨论其相应的性质．

最后，在3.4节，我们讨论这类非周期结构确定的离散 Schödinger 方程．它给出的能谱是一个 Cantor 集．

3.2　自相似序列的原子表面

令 $s = \{s_k\}_{k\geq 1}, s_k \in \{a, b\}$ 是一自相似序列，$\rho = (\rho_a, \rho_b)$ 表示频率向量，$w_n = s_1 s_2 \cdots s_n$ 是 s 的长为 n 的前缀．

3.2.1　序列的空间表示

设(e_a, e_b)是 2 维空间的一组基，由它们张成的空间 V 称为表示空间．我们在这空间里定义一个无穷阶梯格点序列$\{X_k\}_{k\geq 0}$：

$$X_0 = 0,$$

$$\cdots$$

$$X_k = |w_k|_a e_a + |w_k|_b e_b,$$

$$\cdots$$

那么，我们有：

$$X_0 = 0, \quad X_k - X_{k-1} = \begin{cases} e_a, & \text{如果 } s_k = a, \\ e_b, & \text{如果 } s_k = b. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

由

$$\nu_1 = \lim_{k\to\infty} \frac{X_k}{k} = \rho_a e_a + \rho_b e_b$$

张成的 1 维空间称为物理空间，记为 V^E．在代换序列的情形，它由代换矩阵的 Perron－Frobenius特征值 λ_1 的特征方向确定．于是 ν_1 为上述无穷格子阶梯的"平均方向"向量，称之为阶梯截割线．

现在令 s 是 2 元代换 σ 的一个不动点，λ_2 是它的次特征值，相应于它的特征向量 $\nu_2 = (\eta_a, \eta_b)$．由 ν_2 张成的 1 维空间称为内空间．

以 d_a, d_b 表示原子间的两种距离.将原子按照横坐标 x_k 置于直线上,使得:

$$x_0 = 0, \quad x_k - x_{k-1} = \begin{cases} d_a, & \text{如果 } s_k = a, \\ d_b, & \text{如果 } s_k = b, \end{cases}$$

那么，在该链结构中原子间的平均距离为:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{k} \\ &= \rho_a d_a + \rho_b d_b. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

原子的横坐标相应于这个平均格的"涨落"u_k 定义如下:

$$\begin{aligned} x_k &= |w_k|_a d_a + |w_k|_b d_b \\ &= k\bar{a} + (d_a - d_b) u_k, \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

从而有:

$$\begin{aligned} u_k &= |w_k|_a - k\rho_a \\ &= k\rho_b - |w_k|_b. \end{aligned}$$

另一方面,将 X_k 按照物理空间与内空间分解,我们又有:

$$X_k = x_k^E \nu_1 + x_k^I \nu_2, \tag{3.2.4}$$

并且,

$$x_k^E = k + c u_k, \qquad x_k^I = u_k, \tag{3.2.5}$$

这里 c 是由 M_σ 决定的常数.由此可见,链结构中原子对平均格的涨落,恰为无穷阶梯格点对于阶梯截割线(物理空间)在内空间上的涨落.

关于 $|u_k|$,我们有:

(1) 如果 $|\lambda_2| < 1$,那么 $|u_k| - 1$.

(2) 如果 $|\lambda_2| > 1$,那么 $u_k \Leftrightarrow k^\alpha$,这里 $\alpha = \log|\lambda_2| / \log\lambda_1$(由此出发可构造一个处处不可微的自相似函数).

(3) 当 $|\lambda_2| = 1$ 时,则更为复杂.

有关的细节及进一步的性质,参考文献[12] ~ [14].

3.2.2　与截割投影方法的联系

考虑 2 维平面方格 Z^2,物理空间 V^E 在这里定义为直线 $y = \alpha x$(斜率 α 为无理数).窗口 W 取作带状区域:

$$W = \{(x, y): 0 \leqslant y - \alpha x < \alpha + 1\}, \qquad (3.2.6)$$

它在 $y = \alpha x$ 上的射影为1维准周期格子－链结构序列.按照上节所述的空间表示,它的阶梯截割线应为从原点出发且含于 W 内的直线.现在令 $\alpha = \tan\varphi$,为方便起见,设 $0 < \varphi < \pi/4, \omega = \alpha/(\alpha+1)$.那么:

$$|w_k|_a = k - 1 - [k\omega],$$
$$|w_k|_b = 1 + [k\omega],$$

于是原子横坐标为:

$$x_k = k\bar{a} + (d_a - d_b)u_k. \qquad (3.2.7)$$

这里:

$$\bar{a} = \frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi},$$
$$d_a = \cos\varphi, \quad d_b = \sin\varphi.$$

进一步的计算可得,$\{u_k\}$ 的闭包 $\overline{\{u_k\}} = [-1, 0]$,它是一个长度为1的区间.

当 α 是一个2次代数整数,我们可以将它作连分数展开:

$$\alpha = r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{r_3 + \cfrac{1}{\cdots}}}$$
$$= [r_1, r_2, r_3, \dots], \qquad (3.2.8)$$

这个展开式是最终周期的,即存在 p,对任意 k,有 $r_{k+p} = r_k$.另一方面,由截割投影生成的序列可以作为具有下述性质的词序列的极限:

$$w_k = \begin{cases} w_{k-1}^{r_k} w_{k-1}, & \text{当 } k \text{ 为偶数时}, \\ w_{k-2} w_{k-1}^{r_k}, & \text{当 } k \text{ 为奇数时}, \end{cases} \qquad (3.2.9)$$

以及初始值条件 $w_0 = a, w_{-1} = b$.可以证明,它是由代换生成的.

例如,当对所有 k,都有 $r_k = r$ 时,上述截割投影序列可由代换

$$\sigma_r: \begin{cases} a \to (ba^r)^r a, \\ b \to ba^r \end{cases}$$

生成.

3.2.3 原子表面的分形结构

1. 可计数系统

令 σ 是一个 2 元本原代换. 每个自然数 k 结合唯一的可计数系统序列 $(\nu_i, a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, 这里 $a_i \in \mathscr{A}, \nu_i \in \mathscr{A}^*$, 满足条件:

(1) 词 $\nu_{i-1}a_i$ 是 $\sigma(a_i)$ 的前缀;

(2) ν_n 不是空词, 并且 $\nu_n a_n$ 是 $\sigma(a)(a \in \mathscr{A})$ 的前缀,

那么, σ 的一个不动点 $s = s_1 s_2 \cdots s_k \cdots$ 的前 k 个字母的子词可写为:

$$w_k = \sigma^n(\nu_n)\sigma^{n-1}(\nu_{n-1})\cdots\sigma(\nu_1)\nu_0, \tag{3.2.10}$$

从而自然数 k 可按照"非常数基"唯一分解成:

$$k = \sum_{i=0}^{n} \xi_i \mid \sigma^n(a) \mid, \tag{3.2.11}$$

这里 $\xi_i = 0$ 或 1.

例 3.2.1 自然数按 Fibonacci 分解.

设 σ 为 Fibonacci 代换. 令 $F^{(0)} = F^{(1)} = 1, F^{(n+2)} = \mid \sigma^n(a) \mid$, 那么,

$$12 = F^{(5)} + F^{(2)} + F^{(1)} + F^{(0)}, \qquad 8 = F^{(5)},$$

$$1994 = F^{(16)} + F^{(13)} + F^{(6)} + F^{(4)} + F^{(1)} + F^{(0)}.$$

注意到, 容易证明 $F^{(n+2)} = F^{(n+1)} + F^{(n)}$, 从而 $\mid \sigma^n(a) \mid$ 是 Fibonacci 数列.

2. 原子表面的分形结构

下面我们将对可计数系统讨论代换序列 $s = s_1 s_2 \cdots s_k \cdots$ 的原子表面 $S = \overline{\{u_k\}}$ 的分形结构.

引入 S 的子集:

$$L_a = \overline{\{u_k : s_k = a\}}, \qquad L_b = \overline{\{u_k : s_k = b\}};$$

$$R_a = \rho_b + L_a, \qquad R_b = -\rho_a + L_b, \tag{3.2.12}$$

那么 S 被分为不交集的并:

$$S = L_a \bigcup L_b = R_a \bigcup R_b.$$

但是,

$$w_k = \sigma^n(\nu_n)\sigma^{n-1}(\nu_{n-1})\cdots\sigma(\nu_1)\nu_0$$

$$= \sigma(T(w_k))\nu_0,$$

这里 $T(w_k) = \sigma^{n-1}(\nu_n)\sigma^{n-2}(\nu_{n-1})\cdots(\nu_1)$.

于是,w_k 可通过 σ 在较短的词 $T(w_k)$ 上经代换 σ 的膨胀及 ν_0 给出的平移作用确定.

以 $T(k)$ 表示 $T(w_k)$ 的最后一个字母,引入重标子集:

$$L_a^T = \overline{\{u_k : \nu_0 = \varepsilon, T(k) = a\}}, \tag{3.2.13}$$

$$L_b^T = \overline{\{u_k : \nu_0 = \varepsilon, T(k) = b\}}. \tag{3.2.14}$$

为了确定 S,注意到:

(1) 由于量 u_k 与它在 V^I 上的分量成比例,而 V^I 又由 λ_2 的特征方向确定,并且因为代换 σ 在 V^I 上的作用是以 λ 为相似比的压缩,所以在点态乘法的意义下,我们有:

$$L_a^T = \lambda_2 L_a, \qquad L_b^T = \lambda_2 L_b. \tag{3.2.15}$$

(2) 对于 $\sigma(a)$ 的子词 ν_0 的每种可能情况,L_a,L_b 可表示为 L_a^T,L_b^T 以及它们的一些平移集的并.

例3.2.2 Fibonacci 代换.

x_k,ν_0 及 $T(k)$ 所有可能的值如表3.2.1 所示.

表3.2.1 x_k,ν_0 及 $T(k)$ 所有可能值

$T(k)$	(ν_0, s_k)
a	(ε, a),(a, b)
b	(ε, b)

由此我们得到自相似方程:

$$L_a = (-\alpha L_a) \bigcup (-\alpha L_b), \tag{3.2.16}$$

$$L_b = \alpha^2 - \alpha L_a. \tag{3.2.17}$$

它的唯一解是区间:

$$L_a = [-\alpha^2, \alpha^3], \qquad L_b = [\alpha^3, \alpha],$$

$$R_a = [0, \alpha], \qquad R_b = [-\alpha^2, 0],$$

其原子表面 $S = [-\alpha^2, \alpha]$,区间 S 的长度 $|S| = 1$.

为了讨论一般的情形，定义 S 的左右端点分别为 $S_m = \inf S$ 和 $S_M = \sup S$，差 $\Delta S = S_M - S_m$. 进一步的讨论[15]可知，S 是最多可数个不相交区间的并，同时这些区间的长度之和等于 1，从而 $\Delta S \geqslant 1$.

当 $\Delta S = 1$ 时，$S = [t, t+1]$. 可逆代换及截割投影序列即属此种情形；当 $\Delta S > 1$ 时，S 为可数个不连通区间的并，即所谓的厚分形，从而它的边界 ∂S 为一 Cantor 集.

例 3.2.3 平方及立方 Fibonacci 代换链.

它们的代换矩阵分别为：

$$M_{\sigma_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M_{\sigma_3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.2.18}$$

(i) 如果 σ 可逆，那么 $\Delta S = 1$；

(ii) 如果 σ 不可逆，那么 $\Delta S > 1$. 例如，在不可逆平方 Fibonacci 代换链的情形（$a \to aba, b \to ba$ 及 $a \to baa, b \to ab$）有 $\Delta S = \alpha^2$，并且相应的计盒维数为：

$$\dim_B \partial S = \frac{\log(1+\sqrt{2})}{4\log\alpha} \approx 0.915785.$$

详情可参考文献[16].

3.2.4 多元代换链

1. 多元代换链的基本概念

设 σ 是 $\mathscr{A} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 上的 n 元代换，我们假定 M_σ 的特征值是 Pisot 数（即代换链是准周期的），并且它的行列式等于 ± 1. 类似于3.2.1节，可以把空间表示和原子曲面结构推广到相应的代换链上. 取 M_σ 的 Perron－Frobenius 特征值 λ_1 的特征方向为代换链的密度向量 $\rho = (\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n)$.

以 $d_1, d_2 \cdots, d_n$ 表示原子间的 n 种距离. 将原子按照横坐标 x_k 置于直线上，使 $x_0 = 0$，并且如果代换链 s 的第 k 个字母为 a_i，则取 $x_k - x_{k-1} = d_i$. 那么，在该链结构中原子间的平均距离为：

$$\bar{a} = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{k} = \sum_{i=1}^{n} d_i \rho_i. \tag{3.2.19}$$

同样，我们可以按照 n 维空间 V^n 的基向量 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 给出 s 在 $\mathbf{Z}^n$ 中的格子序列 X_k，它的平均截割线为由 ρ 生成的物理空间 V^E，从而直和分解 $V =$

$V^E \oplus V^I$ 给出内空间 V^I，并且 V^I 由 M_σ 的次特征值 $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 生成（如果 λ_i 和 λ_{i+1} 是一对共轭复根，那么 ν_i 及 ν_{i+1} 分别取作 λ_i 的特征向量的实部及虚部）.

于是，$X_k = x_k^I V^I + s_k^E V^E$，这里 $x_k^I = \sum_{i=2}^{n} u_{ik} \nu_i$. 而 σ 在 V^I 上的作用是由

$$\Lambda^I = \begin{bmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

确定的压缩.

于是，我们定义链结构的原子表面 $S = \overline{\{(u_{2k}, \cdots, u_{nk}) \in \mathbf{R}^{n-1}\}_{k \geq 0}}$. 它可能具有分形边界.

2. *多元代换链的例子*

下面为两个 3 元代换的例子[16].

例3.2.4 7 次旋转对称对称代换[17].

7 次旋转对称代换的代换矩阵为（一种典型的可逆代换为 $\sigma: a \to abc, b \to ac, c \to bc$）：

$$M_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

它与一种由多种三角形铺满平面的准周期结构相联系（其衍射谱呈现 7 次旋转对称）.

我们有：

$$\lambda_1 = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{7},$$

$$\lambda_2 = 1 - 2\cos\frac{\pi}{7},$$

$$\lambda_3 = 1 - 2\cos\frac{3\pi}{7},$$

其密度向量为：

$$\rho = \left(2\cos\frac{2\pi}{7} - 1, \quad 2 - 2\cos\frac{2\pi}{7} - 2\cos\frac{3\pi}{7}, \quad 2\cos\frac{3\pi}{7}\right).$$

基向量在 V^I 上的分量分别为：

$$e_1^I = \begin{bmatrix} 1 - 2\cos\dfrac{\pi}{7} \\ 1 - 2\cos\dfrac{3\pi}{7} \end{bmatrix},$$

$$e_2^I = \begin{bmatrix} 4\cos\dfrac{\pi}{7} \\ 4\cos\dfrac{3\pi}{7} \end{bmatrix},$$

$$e_1^I = \begin{bmatrix} -2\cos\dfrac{\pi}{7} \\ -2\cos\dfrac{3\pi}{7} \end{bmatrix}.$$

而 S 的面积为：

$$|S| = 6\cos\frac{\pi}{7} - 1.$$

对于代换 $a \to bac, b \to ac, c \to cb$，考虑代换词的可能值，如表 3.2.2 所示.

表3.2.2　代换词的可能值

$T(k)$	(ν_0, s_k)
a	$(\varepsilon, b), (b, a), (ba, c)$
b	$(\varepsilon, a), (a, c)$
c	$(\varepsilon, c), (c, b)$

由此得：

$$L_a = (e_2^I + \Lambda^I L_a) \bigcup (\Lambda^I L_b),$$

$$L_b = (\Lambda^I L_a) \bigcup (e_3^I + \Lambda^I L_c),$$

$$L_c = (e_1^I + e_2^I + \Lambda^I L_a) \bigcup (e_1^I + \Lambda^I L_b) \bigcup (\Lambda^I L_c).$$

例 3.2.5　复特征值的例子——3 元 Fibonacci 代换（又称为 Rauzy 代换）. 它们的代换矩阵为（一种典型的可逆代换为 $\sigma: a \to ac, b \to a, c \to b$）：

$$M_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

它的特征多项式为 $P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda_2 - 1$.

确定原子表面的自相似方程为：

$$L_a = \lambda_2 L_c, \qquad L_b = \lambda_2 L_a,$$

$$L_c = \lambda_2 L_b \bigcup (1 + \lambda_2 L_c).$$

有关这方面内容的详细论述可查阅有关文献.

3.3 Fourier 变换谱的重分形分析

3.3.1 重分形分析的一般形式

1. 正测度

重分形分析是刻画具有正测度特性的一个工具[18]，而正测度则用来描述诸如质量、集合上的分布、测度的支撑等对象. 下面将考虑一种由衍射谱(Fourier 灰度)给出的测度分布.

我们给出三类不同的正测度：

(1) 原子测度(离散测度). 如服从二项式律的概率测度，其质量分布函数 $M(x)$ 是一个值域为可数集的阶梯函数 $\sum_a q_a \delta(x - x_a)$.

(2) 绝对连续测度. 如服从正态律，$M(x)$ 是可微的，其导数 $M'(x) = \rho(x)$ 是测度的密度(如 Gauss 函数).

(3) 奇异连续测度. 它既不是离散的，也无绝对连续分支. 例如 Cantor 三分集的自然测度[27].

现在介绍重分形分析. 重分形在整体上描述了正测度分布不均匀的奇异特性.

为简单起见，考虑一个支撑在单位区间[0,1]上的概率测度. 我们将该区间分为 N 个长度为 ε 的盒子，第 i 个盒子的概率为：

$$p_i = \int_{i\varepsilon}^{(i+1)\varepsilon} \mathrm{d}\mu, \tag{3.3.1}$$

那么，p_i 提供了点 $x = i\varepsilon$ 周围测度的局部性态. 特别地，如果 p_i 满足幂律：

$$p_i \Leftrightarrow \varepsilon^{\alpha}, \qquad \varepsilon \to 0, \tag{3.3.2}$$

则指数 α 给出了点 $x = i\varepsilon$ 的测度的局部奇异的浓度的一个估计.

对应于前面三类测度，有如下性质：

(1) 绝对连续：即 $p_i \approx \rho(x)\varepsilon, \varepsilon \to 0$，亦即 $\alpha = 1$.

(2) 离散(原子)：即对于足够小的 $\varepsilon, \alpha = 0$，每个盒子的概率或者是零，或者是 q_a.

(3) 奇异连续：即无一般规律，任何局部 α 都可能出现.

2. 重分形分析

重分形分析至少在统计意义下可以给出这类测度的局部奇异性，其出发点是配分函数：

$$Z(Q) = \sum_{i=1}^{N} p_i^Q. \tag{3.3.3}$$

只要它具有幂律性态：

$$Z(Q) \Leftrightarrow \varepsilon^{r(Q)}, \tag{3.3.4}$$

我们就称测度 $D\mu$ 是重分形的.

因为 $Z(Q) = 1$，故对任意 ε，有 $r(1) = 0$. 于是可令：

$$r(Q) = (Q-1)D_Q,$$

这里 D_Q 可以看作是指标 Q 的广义维数. 当 $Q = 0$ 时，配分函数 $Z(Q)$ 是宽为 ϵ 的非空盒子的个数. 于是 D_0 可看作是测度的支撑的某种分形维数. D_1 和 D_2 分别视为测度的信息维数和修正维数. 而在所谓正则的分形测度的情形(如 Cantor 三分集)，对任意 Q，我们有 $D_Q = D_0$，即正则分形被单一的维数所刻画.

广义维数 D_Q 的连续解释如下. 设 x 可按其局部指数 α 排序：

$$S_\alpha = \{x : x \text{ 处的局部指数为 } \alpha\}, \quad g(\alpha) = \dim S_\alpha.$$

如果对子标度 ε，分形维数是正则的，那么盒子的个数 $N_\alpha(\varepsilon)$ 服从标度律，即：

$$N_\alpha(\varepsilon) \Leftrightarrow \varepsilon^{-g(\alpha)}, \tag{3.3.5}$$

于是配分函数 $Z(Q)$ 可写成指数值上的积分

$$Z(Q) \Leftrightarrow \int \mathrm{d}\alpha\, \varepsilon^{\alpha Q - g(\alpha)}. \tag{3.3.6}$$

对于 $\epsilon \to 0$，其值可通过鞍点方法计算. 上式指数条件给出 Q 的值，即：

$$Q = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\alpha}, \tag{3.3.7}$$

并且结合的指数值给出：

$$r(Q) = \alpha Q - g(\alpha), \tag{3.3.8}$$

从而函数 $r(Q)$ 可通过 $g(\alpha)$ 的 Legendre 变换获得.它的逆变换可通过

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} \tag{3.3.9}$$

及(3.3.8)式给出.

当 Q 连续地从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化时,上述公式描绘出一条(α,g)平面上的曲线.特别地,曲线的斜率就是 Q 本身.曲线的顶端由 $Q=0$ 的相应值给出,$g|_{Q=0}$ 的值给出支撑集的维数 D_0,而 $\alpha|_{Q=0}$ 的值需确定.

3.3.2　Fourier 变换及灰度测度

1.　Fourier 变换及灰度

令 $s = s_1 s_2 \cdots s_k \cdots$ 是一个代换序列,它结合的两个序列的 Fourier 变换及结构因子已在3.1 节中定义.但随 N 的增大,$S_N(q)$ 的收敛性较差,有限样本的数值计算会带来很大的误差.例如,当我们考虑如下归一权的分布:

$$p_i = \frac{2i+1}{N^2}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N. \tag{3.3.10}$$

当 N 足够大时,其配分函数 $Z(Q)$ 可由积分算得:

$$Z(Q) \approx N^{1-Q}\frac{2^Q}{Q+1}.$$

由(3.3.4)式，有

$$r(Q) = Q - 1 + \frac{\varphi(Q)}{\ln Q}, \tag{3.3.11}$$

这里 $\varphi(Q) = \ln(Q+1) - Q\ln 2$.于是 $r(Q)$ 渐近地等于 $Q-1$.这时 α 和$g(\alpha)$对所有的 Q 都等于1.曲线 $g(\alpha)$ 退化成一点.因为由(3.3.10)式定义的权对应于支撑区间为[0,1]的绝对连续测度,这正是我们期望的结果.按上节的观念,我们有 $\epsilon = 1/N$,$x = i\epsilon$,且 $\rho(x) = 2x$.这样的权的分布没有重分形.

但不论自然数 N 取多大,所给出的数据总会描出一条 $g(\alpha)$ 曲线,而不会收缩成一点.这说明任何有限样本的计算都会给出虚假的重分形曲线 $g(\alpha)$.

为了消除有限样本带来的假象,通常需要仔细地分析 $g(\alpha)$ 曲线顶端附近($Q \to 0$)的局部性态,于是,我们可以考虑 $g(\alpha)$ 曲线顶端的曲率.根据(3.3.7)～(3.3.9)式,曲率 C 可由下式得到:

$$C = \left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\alpha^2}\right)_{Q=0} = \left(\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}Q^2}\right)^{-1}_{Q=0}. \tag{3.3.12}$$

再由(3.3.11)式得估计式:

$$C \approx \frac{\ln N}{\varphi''(0)}, \tag{3.3.13}$$

在此情形,即 $C \approx -\ln N$. 由有限样本点造成的虚假 $g(\alpha)$ 曲线的曲率按照样本点的对数发散. 这表明 $g(\alpha)$ 曲线在趋于无穷时不是光滑的. 也就是说,绝对连续测度没有重分形谱. 在某些情形下,标度函数 $\varphi(Q)$ 可以提供一些附加的信息. 在代换序列的情形, $\ln N$ 是一个十分自然的变量.

对于[0,1]上由密度 $\rho(x)$ 的任意绝对连续分布,按照上面的论述,归一权为:

$$p_i = \frac{\rho\left(\frac{i}{N}\right)}{N_m(1)}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N, \tag{3.3.14}$$

这里,

$$m(Q) = \int_0^1 (\rho(x))^Q \mathrm{d}x.$$

容易得到:

$$Z(Q) \approx N^{1-Q} \frac{m(Q)}{m(1)^Q}, \qquad N \to \infty.$$

于是 $r(Q)$ 呈现出如(3.3.11)式非常相同的标度,并且有:

$$\varphi(Q) = Q\ln m(1) - \ln m(Q).$$

特别地,我们有:

$$\begin{aligned} -\varphi''(0) &= m''(0) - m'(0)^2 \\ &= \int_0^1 \ln^2 \rho(x)\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 \ln\rho(x)\mathrm{d}x\right)^2. \end{aligned}$$

上式右边显然是正的,并且由(3.3.13)式可知,曲率 C 是负的.

2. Fourier 变换谱的灰度测度

由上面所述,按照严格的观点,应该考虑无穷序列的 Fourier 变换谱的灰度测度. 这个正测度可通过分布函数

$$H(q) = \lim_{N\to\infty}\int_0^q S_N(q')\mathrm{d}q' \tag{3.3.15}$$

来定义，这个量类似于前面的 $M(x)$，具有良好的性态．我们可用

$$dH(q) = S(q)d\,q$$

来形式地定义相应于无穷序列的 $S(q)$．它也可看成是一个分布．

从 Fourier 灰度的局部性态，按照 $F_N(q)$ 作为 N 的函数振幅的增长，有如下几种情形：

(1) Bragg 峰．这是那些使

$$F_N(q_0) \approx C(q_0)N$$

q 的值 q_0，而 $C(q_0)$ 是复振幅．$H(q)$ 在 $q = q_0$ 处有不连续的强度 $|C(q_0)|^2$，其结构因子 $S(q)$ 含有 δ 函数 $|C(q_0)|^2\delta(q - q_0)$．不论是周期、准周期（概周期）结构，这些 Fourier 灰度的测度是原子的．

(2) 漫散射．这个情形相应于结构因子 $S(q)$ 是光滑函数．例如非晶体结构．它的 Fourier 振幅 $|F_N(q)|$ 按 $N^{1/2}$ 典型地增长．其相应的 Fourier 灰度测度是绝对连续的．

(3) 奇异散射．如果某些波向量 q_0 有幂律：

$$F_N(q_0) \Leftrightarrow N^{\nu}, \quad \frac{1}{2} < \nu < 1,$$

那么，$S_N(q_0) \Leftrightarrow N^{2\nu-1}$．于是当 $q \to q_0$，N 足够大时，$S_N(q)$ 是 $N(q - q_0)$ 的函数．这就暗示相应无穷序列分布函数：

$$|H(q) - H(q_0)| \Leftrightarrow |q - q_0|^{\alpha}, \quad \alpha = 2(1 - \nu), \tag{3.3.16}$$

局部指数 α，ν 依赖于 q_0．因为 $0 < \alpha < 1$，灰度 $S(q_0)$（形式上等于 $H(q)$ 在 q_0 处的导数）为发散的．在 Bragg 峰的情形，$\alpha = 0$，$\nu = 1$，故可认为这种情形之下它在无穷处“小于”Bragg 峰的情形．

这种情况显示较为复杂的性态，其 Fourier 灰度测度被猜想为奇异连续的．

(4) $F_N(q)$ 作为有限尺度的函数，处处不服从局部幂律，所有 Fourier 变换为奇异连续都可能属于此种情形．

为了做重分形分析，我们首先考虑积分[28]：

$$I_n = \int_0^{q_{max}} dq\,|S_N(q)|^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3.17}$$

如果 $q_{max} = 2\pi/a$，这里 a 是原子团的平均距离，这个积分的性态依赖于 Fourier 变换谱（灰度测度）的性质．

(a) 如果 Fourier 变换谱是原子的，即为 Bragg 峰，积分 I_N 应渐近于 $N^{-1/2}$；

(b) 当谱是绝对连续时，即如果 $S(q)$ 是光滑函数，则：

$$I_N \to I = \int_0^{q_{\max}} \mathrm{d}q \mid S(q) \mid^{\frac{1}{2}}, \qquad N \to \infty.$$

(c) 当谱是奇异连续时，则可以有 $I_N \Leftrightarrow N^{\beta}, 0 < \beta < 1/2$.

重分形的要点在于概率权 p_i 的定义.

考虑序列 $\{\epsilon_k\}_{k\geqslant 0}$ 的 Fourier 变换. 将 $\{\epsilon_k\}_{k\geqslant 0}$ 看作 $\sigma^n(a)$ 周期重复的极限. 而周期序列的 Fourier 变换由 Bragg 峰组成，形如：

$$q_m = \frac{2\pi m}{N}, \quad m \in \mathbf{Z},$$

其相应的振幅为：

$$C_m = \frac{f_N(q_m)}{N}.$$

由于 f 的周期为 2π，我们只需考虑 $m = 1,2\cdots,N$. 于是，作重分形分析的权取成相应的灰度：

$$p_m = \frac{\mid C_m \mid^2}{S}, \quad S = \sum_{m=1}^{N} \mid C_m \mid^2. \tag{3.3.18}$$

用同样的办法处理链结构序列(3.1.3)式，$L = x_N$，则其相应的 Bragg 峰为：

$$q_m = \frac{2\pi m}{L}, \quad m \in \mathbf{Z}, \tag{3.3.19}$$

并且结合的振幅为：

$$C_m = \frac{F_N(q_m)}{N}.$$

在数值计算中，我们用有限波向量 M 代替整个 q 轴. 通常我们取 M 为 N 的若干倍数.

按照以上 p_i 的定义，计算 $g(\alpha)$ 曲线. 直接计算配分函数的微分如下：

$$Z'(Q) = \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}Q} = \sum_{i=1}^{M} p_i^Q \ln p_i,$$

$$Z''(Q) = \frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}Q^2} = \sum_{i=1}^{M} p_i^Q (\ln p_i)^2.$$

α 和 g 的值可由

$$\alpha = -\frac{Z'(Q)}{Z(Q)\ln M}$$

及

$$g = \frac{1}{\ln M}\left(\ln Z(Q) - \frac{QZ'(Q)}{Z(Q)}\right)$$

简单地给出.而 $g(\alpha)$ 曲线在顶端的曲率 C 由

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\ln M}\left(\frac{Z'(0)^2}{Z(0)^2} - \frac{Z''(0)}{Z(Q)}\right)$$

得出.由于 $N = |\sigma^n(a)|$,对 M 有估计:

$$\ln M \approx n \ln\lambda_1, \qquad n \to \infty.$$

这里 λ_1 是代换矩阵的最大特征值.

由上所述可见,如下几点是需要着重讨论的:

(1) 曲线 $g(\alpha)$ 的顶端的横坐标 α_0(相应于 $Q = 0$ 的值)是刻画波向量 q 处的灰度测度局部奇异的指数.只要灰度测度是真正的重分形,那么 $\alpha_0 > 1$.因为整个 q 轴是 Fourier 的支撑集,相应的 $g(\alpha_0)$ 的值为 1.

(2) 按照3.3.1 节所述,曲线 $g(\alpha)$ 在横轴的左右端点值 $\alpha_{\min}$ 及 $\alpha_{\max}$ 表示奇异指数 α 的最大值和最小值.

(3) 由 $Q = 1$ 给出的值 α_1 具有关系 $g(\alpha_1) = \alpha_1 = D_1$.这个量可视为 Fourier 灰度测度的"信息维数"

(4) 值 $d_p = g(1)$ 表示使波向量 q 的局部指数 α 小于 1 的集的维数.从物理角度来看,d_p 是峰集的维数(奇异散射峰).

3.3.3　几类典型序列的结果

1.　Fibonacci 代换

Fibonacci 序列是准周期的.它的 Fourier 灰度 $S(q)$ 由 δ 函数组成,即它的 Bragg 峰在波向量 q 的值为:

$$q = 2\pi(j + k\tau), \quad \tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \qquad j, k \in \mathbf{Z}. \tag{3.3.20}$$

其 Bragg 灰度是:

$$A_k = |C_k|^2 = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 k\pi r}{k^2\pi^2}, & \text{对于 } k \neq 0, \\ r^{-4}, & \text{对于 } k = 0. \end{cases} \tag{3.3.21}$$

2. 圆序列

抽象的圆序列由下式定义：

$$\varepsilon_n = \chi_\Delta(n\omega), \tag{3.3.22}$$

这里 χ_Δ 表示区间$[0,\Delta]$的特征函数，$n \in \mathbf{Z}, 0 < \omega, \Delta < 1$(从几何上看，在单位圆上给定角为 Δ 扇区，及一个初始角 ω，如果 $n\omega$ 落进 Δ 的扇区，则取 $\varepsilon_n = 1$，否则取 0)．当 $\omega = \Delta = r^{-2}$，那末，ε_n 给出 Fibonacci 序列．

一般地，当

$$\Delta = r\omega (\mathrm{mod}\ 1), \quad r \in \mathbf{N},$$

那么，相应的$\{\varepsilon_n\}$都是准周期的．

如果上述条件不满足，可以证明，该序列在其内空间上的涨落序列$\{u_k\}$(参看 3.2 节)是无界的，并猜想其链结构给出奇异连续，尽管该序列是准周期的[13]．

一个特殊的情形是：

$$\omega = r^{-2}, \qquad \Delta = \frac{1}{2},$$

它可由 3 元代换(圆代换)$\sigma: a \to cac, b \to accac, c \to abcac$ 的代换序列通过投影 $a \to 1, b \to 1, c \to 0$ 给出．它的代换矩阵的特征多项式在 $\mathbf{Z}$ 上是可约的，特征值为 $r^3, -1, -r^3$，因此它不适合 Bombieri - Taylor 定理的条件．

用 l_n^t 表示 $|\sigma^n(t)|$，用 f_n^t 表示 $f_{|\sigma^n(t)|}$，这里 $t \in \{a, b, c\}$．其 Fourier 振幅满足递归关系：

$$f_{n+1}^a = f_n^c + \exp(-il_n^c q) f_n^a + \exp(-i(l_n^c + l_n^a)q) f_n^c, \tag{3.3.23}$$

$$f_{n+1}^b = f_n^a + \exp(-il_n^a q) f_n^c + \exp(-i(l_n^a + l_n^c)q) f_{n+1}^a, \tag{3.3.24}$$

$$f_{n+1}^c = f_n^a + \exp(-il_n^a q) f_n^a + \exp(-i(l_n^a + l_n^b)q) f_{n+1}^a, \tag{3.3.25}$$

及初始值：

$$f_0^a = f_0^b = e^{-iq}, \quad f_0^c = 0,$$

借助 Fibonacci 数列，这些迭代词中的原子个数为：

$$l_n^a = F^{(3n+1)}, \quad l_n^b = l_n^c = F^{(3n+2)}.$$

如同 Fibonacci 链一样，圆代换的抽象序列是准周期的，在与(3.3.20) 式相同处的 q 具有 Bragg 峰，其 Fourier 灰度没有重分形.

对于圆代换的链结构，相应的 F_n^a, F_n^b 及 F_n^c 按照原子间距离 $l_a = 1 + \xi, l_b = 1 + \xi$ 及 $l_a - 1$，同样满足(3.3.23) 式的递归关系，但初值为：

$$F_0^a = F_0^b = e^{i(1+\xi)q}, \quad F_0^c = e^{iq}.$$

其 Fourier 灰度测度被猜想为奇异连续的[13]，从而得到：

$$F\alpha_0 \approx 1.60, \quad \alpha_1 \approx 0.55, \quad \alpha_{\min} \approx 0.15,$$

$$\alpha_{\max} \approx 3.8, \quad d_p \approx 0.86.$$

3. Thue - Morse 代换

抽象 Thue - Morse 序列的递归表示为：

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 0, \\ \varepsilon_{2k} &= \varepsilon_k, \\ &\cdots, \\ \varepsilon_{2k+1} &= 1 - \varepsilon_k. \end{aligned} \tag{3.3.26}$$

用 f_n^a 表示 $f_{|\sigma_n(a)|}$，f_n^b 表示 $f^{|\sigma_n(b)|}$，其 Fourier 振幅满足递归关系：

$$f_{n+1}^a = f_n^a + e^{i2^n q} f_n^b,$$

$$f_{n+1}^b = f_n^b + e^{i2^n q} f_n^a.$$

初始值为：

$$f_0^a = -f_0^b = e^{-iq}.$$

相应的灰度为：

$$\begin{aligned} S_N(q) &= 2^{-n} |f_n^a|^2 = 2^{-n} |f_n^b|^2 \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} 2\sin^2 2^{k-1} q, \quad n \neq 0. \end{aligned} \tag{3.3.27}$$

可以证明，它们对每个 $x = q/2\pi$ 的有理数服从局部幂律. 因为，令 $q = 2\pi j/k$ ($j, k \in \mathbf{Z}$，且 k 为奇数)，(3.3.27) 式给出的相序列 $2^{m-1}q \pmod{2\pi}$ 是最终周期的，且这个周期 $p \leqslant k$. 故存在 m_0，对任意 $m \geqslant m_0$，都有 $2^{m+p}q = 2^m q \pmod{2\pi}$. 于是容易得到标度律：

$$S_N\left(\frac{2\pi j}{k}\right) \leftrightarrow 2^{n(1-\alpha_j)},$$

这里指数 α 定义与(3.3.18) 式相一致，其精确的表达式如下：

$$1-\alpha_{\frac{j}{k}}=2r\frac{j}{k}-1=\frac{1}{p\ln 2}\sum_{m=m_0+1}^{m_0+p}\ln\left(2\sin^2\frac{2^m\pi j}{k}\right).$$

容易验证,对形如 $q=2\pi(j/k+M)/2^N(M\in\mathbf{Z},N\in\mathbf{N})$ 的任何波向量,也都具有相同的指数值 $\alpha_{j/k}$,其局部奇异性最强,也就是说,最小的指数 α 出现在 $q=2\pi/3$ 及所有相应的波向量,我们有:

$$\alpha_{\frac{1}{3}}=2-\frac{\ln 3}{\ln 2}\approx 0.415.$$

从而 Fourier 灰度呈现无穷多不同的局部指数 $\alpha_{j/k}$,它们从 $\alpha_{1/3}$ 到 ∞,其中比 1 小的也有无穷多[19].

Thue - Morse 序列的 Fourier 灰度测度也是本性奇点的一个稠密子集.为了说明这一点,首先注意到,对于灰度 $S_n(q)$,由(3.3.27)式可以推出如下函数方程:

$$S_n(q)=2\sin^2\frac{q}{2}S_{n-1}(2q).$$

通过对上式的迭代,可以证明,对于小的波向量有 $S(q)\Leftrightarrow 2^{n(n-2)}q^{2n}$.因此,极限分布函数 $H(q)$ 在 $q=0$ 的附近比 q 的任何次幂更快地趋于零.事实上,关于 n,我们有估计:

$$H(q)=\exp\left(-\frac{\ln^2 q}{\ln 2}\right)+O(\ln q).\qquad(3.3.28)$$

现在讨论其Fourier灰度测度的重分形.我们考虑形如 $q=2\pi m/2^n$ 的波向量,这里 $1\leqslant m\leqslant 2^n$.因为灰度是周期为 2π 的 q 的偶函数,m 的取值可以限制在 2^{n-1} 之内.此外,(3.3.27)式表明,当 m 为偶数时,$S_n=0$.于是配分函数 $Z(Q)$ 的取值可以限制在 m 的奇数值上,即从 1 到 $2^{n-1}-1$ 间共 2^{n-2} 个值上,也就是:

$$Z(Q)=\sum_{m=1}^{2^{n-1}-1}\left(2\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2 2^{k-n}(2m-1)\pi\right)^Q.\qquad(3.3.29)$$

数值计算显示出:

$$\alpha_{\min}=\alpha|_{Q\to\infty}=\alpha_{\frac{1}{3}},$$

以及

$$\alpha_0=2,\quad \alpha_1\approx 0.73,\quad d_p\approx 0.89,\quad c\approx -0.07.$$

4. Rudin Shapiro *序列*

Rudin - Shapiro代换已在3.1.1节中给出，其抽象序列由相应的4元代换链中将 a，c 替换成1，将 b，d 替换成 -1而得．它还有其他的一些等价定义(如递归定义)，可参考文献[10]．

引用前面的记号，其 Fourier 振幅满足递归关系：

$$\begin{bmatrix} f^a_{n+1} \\ f^b_{n+1} \\ f^c_{n+1} \\ f^d_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & e^{i2^n q} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i2^n q} & 1 \\ 1 & e^{i2^n q} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i2^n q} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^a_n \\ f^b_n \\ f^c_n \\ f^d_d \end{bmatrix}, \tag{3.3.30}$$

初始值为：

$$f^a_0 = f^c_0 = e^{-iq}, \quad f^b_0 = f^d_0 = -e^{-iq}.$$

对 n 用归纳法，可得：

$$f^a_n = -f^d_n, \quad f^b_n = -f^c_n.$$

实际上，只有两种独立的 Fourier 灰度．取实数 U_n，V_n，W_n，使得：

$$U_n = \frac{S^a_n - S^b_n}{2} = \frac{|f^a_n|^2 + |f^b_n|^2}{2^{n+1}},$$

$$V_n + iW_n = \frac{f^a_n \overline{f^b_n}}{2^n},$$

可得递归关系：

$$\begin{bmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \\ W_{n+1} \end{bmatrix} = O_n \begin{bmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{bmatrix},$$

这里，

$$O_n = \begin{bmatrix} 0 & -\cos 2^n q & -\sin 2^n q \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin 2^n q & -\cos 2^n q \end{bmatrix}, \tag{3.3.31}$$

其初始值为 $U_0 = 0$，$V_0 = 1$，$W_0 = 0$．显然，O_n 是正交矩阵，(U_0, V_0, W_0) 在单位球面上，从而 (U_n, V_n, W_n) 也在单位球面上．特别地，我们有 $|U_n| \leqslant 1$，因而对任意 n 及波向量 q 都有 $0 \leqslant S_n \leqslant 2$．换言之，其 Fourier 灰度是有界

的，且不存在 q 的值，具有比 1 小的局部指数 α.

事实上，Rudin－Shapiro序列的Fourier灰度测度是绝对连续的[9]，且无穷链的灰度为：

$$S(q) = \frac{1}{2\pi}. \tag{3.3.32}$$

5. 非 Pisot 代换的例子

(1) 2 元链. 考虑代换：

$$\begin{cases} \sigma(a) = ab, \\ \sigma(b) = aaa, \end{cases} \quad a \to 1, b \to -1. \tag{3.3.33}$$

其代换矩阵的特征值 $\lambda_{1,2} = (5 \pm \sqrt{5})/2$ 都大于 1. 引用前面的记号，我们有：

$$l_{n+1}^a = l_n^a + l_n^b, \quad l_{n+1}^b = 3l_n^a,$$

且初值为 $l_0^a = l_0^b = 1$. 其抽象序列的 Fourier 灰度满足如下递归关系：

$$f_{n+1}^a = f_n^a + \exp(-il_n^a q) f_n^b$$

$$f_{n+1}^b = [1 + \exp(-il_n^a q) + \exp(-2il_n^b q)] f_n^a$$

初值为 $f_0^a = -f_0^b = e^{-iq}$.

该序列的理论上的结果是未知的，并被猜想是奇异连续的. 其数值计算结果见表 3.3.1.

(2) 3 元链. 定义 3 元代换如下：

$$\begin{cases} \sigma(a) = c, \\ \sigma(b) = a, \quad a \to 1, b \to 1, c \to -1. \\ \sigma(c) = bab, \end{cases} \tag{3.3.34}$$

其代换矩阵的特征值 $\lambda_1 \approx 1.521, \lambda_{2,3} \approx -0.761 \pm 0.858$，它们的模都大于 1. 我们有 $\sigma^n(a) = \sigma^{n+1}(b), \sigma^n(c) = \sigma^{n+2}(b)$，于是只需考虑序列 $\sigma^n(b)$. 一个简单的计算得：

$$\begin{aligned} \sigma^{n+3}(b) &= \sigma^{n+1}(c) \\ &= \sigma^n(bab) \\ &= \sigma^n(b)\sigma^n(a)\sigma^n(b) \\ &= \sigma^n(b)\sigma^{n+1}(b)\sigma^n(b), \end{aligned}$$

从而，

$$l_{n+3} = l_{n+3}^b = 2l_n^b + l_{n+1}^b = 2l_n + l_{n+1},$$

$$f_{n+3} = f^{b}_{n+3} = (1 + e^{-i(l_n + l_{n+1})q}) f_n + e^{-il_nq} f_{n+1},$$

初始值为 $l_0 = l_1 = l_2 = 1, f_0 = f_1 = -f_2 = e^{-iq}$.

与上面的例子一样,这里给出数值计算结果,见表 3.3.1.

表3.3.1　数值计算结果

序列	Fourier 变换	重分形	$\alpha_{\min}$	α_0	α_1	$\alpha_{\max}$	d_p
Fibonacci	离散	无	–	2	–	–	0
抽象圆序列	离散	无	–	2	–	–	0
结构圆序列	奇异连续	有	0.15	1.60	0.55	3.8	0.86
Thue – Morse 序列	奇异连续	有	0.41	2	0.73	–	0.89
Rudin-Shapiro 序列	绝对连续	无	–	1	–	–	–
非 Pisot-2 元链	奇异连续	有	0.15	2	0.44	–	0.83
非 Pisot-3 元链	奇异连续	有	0.2	1.36	0.64	3.6	0.92

3.4　非周期势的离散 Schödinger 方程

3.4.1　1 维离散 Schödinger 方程的初步知识

1.　离散 Schödinger 方程及其解

关于 1 维非周期势的离散 Schödinger 方程,近年来已被众多学者所研究,参考文献[20]~[23].

考虑结合 1 维非周期序列 $\nu = \{\nu_n\}$ 的离散 Schödinger 方程:

$$E\psi_n = \nu_n\psi_n + \psi_{n-1} + \psi_{n+1}, \qquad n \in \mathbf{Z}, \tag{3.4.1}$$

这里 ν_n 是势(取实数),E 是能(可以取实数或复数).

我们将要通过对(3.4.1)式的分析,来描述 $\{\nu_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$"无序"的类型.其次,通过对能 E 的确定来刻画(3.4.1)式的解.

作为 2 阶齐次线性方程,它的解是一个 2 维向量空间:

(1) 如果 $\psi^{(1)},\psi^{(2)}$ 是(3.4.1)式的解,那么:

$$\psi = c_1\psi^{(1)} + c_2\psi^{(2)}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{C} \tag{3.4.2}$$

也是(3.4.1)式的解.

(2) 存在两个线性无关的解 $\psi^{(1)},\psi^{(2)}$.

事实上,$\psi^{(1)}$ 与 $\psi^{(2)}$ 是线性无关的解,当且仅当它的 Wronsky 行列式:

$$\begin{aligned} W[\psi^{(1)},\psi^{(2)}] &= \psi_{n+1}^{(1)}\psi_n^{(2)} - \psi_n^{(1)}\psi_{n+1}^{(2)} \\ &= \psi_1^{(1)}\psi_0^{(2)} - \psi_0^{(1)}\psi_1^{(2)} \\ &= \text{const} \neq 0, \qquad n \in \mathbf{N}. \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

在连续的情形为:

$$\frac{\mathrm{d}\psi^{(1)}}{\mathrm{d}x}\psi^{(2)} - \frac{\mathrm{d}\psi^{(2)}}{\mathrm{d}x}\psi^{(1)}.$$

以 $SL_2(\mathbf{C})$ 表示所有行列式为 1 的 2 阶矩阵群,对于 $A \in SL_2(\mathbf{C})$,按照它的特征值 λ_1,λ_2,可做如下分类:

(a) 双曲型. λ_1,λ_2 是实数,并且 $|\lambda_1| - |\lambda_2| > 1$,有两个实的独立的特征向量,$\mathrm{tr}A > 2$.

(b) 椭圆型. $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\varphi}$,$\varphi \neq n\pi$,$\mathrm{tr}A = 2\cos\varphi$,有两个共轭的特征向量.

(c) 抛物型. $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \pm 1$,只有一个独立的特征向量,$|\mathrm{tr}A| = 2$.

(d) $A = \pm 1$.

引入(3.4.1)式的转移矩阵:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} E - \nu_n & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= T_n \begin{bmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= T_n T_{n-1} \cdots T_1 \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{bmatrix} \\ &= A_n(E) \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

这里 $T_k \in SL_2(\mathbf{C})$,$k \in \mathbf{N}$,$A_n(E) = T_n T_{n-1} \cdots T_1$. 类似地有:

$$\begin{bmatrix} \psi_{-n+1} \\ \psi_{-n} \end{bmatrix} = T_{-n+1}^{-1} T_{-n+2}^{-1} \cdots T_0^{-1} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{bmatrix}$$

$$= A_{n+1}(E)\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_0\end{bmatrix}.$$

当 $\psi^{(1)},\psi^{(2)}$ 是(3.4.1)式具有初值 $\psi_1^{(1)} = 1, \psi_0^{(1)} = 0, \psi_1^{(2)} = 0, \psi_0^{(2)} = 1$ 的解,那么易得:

$$A_n = A_n\begin{bmatrix}\psi_1^{(1)} & \psi_1^{(2)}\\ \psi_0^{(1)} & \psi_0^{(2)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\psi_{n+1}^{(1)} & \psi_{n+1}^{(2)}\\ \psi_n^{(1)} & \psi_n^{(2)}\end{bmatrix}. \tag{3.4.4}$$

从而,$\det A_n = W[\psi^{(1)},\psi^{(2)}]$.

可以证明,$P_n(E) = \mathrm{tr}A_n(E)$ 为具有 n 个不同实根的E 的n 次多项式,并且当 $|P_n(E)|<2$,有$\dfrac{\mathrm{d}P_n(E)}{\mathrm{d}E}\neq 0$.

$\|A\|$ 表示 A 的谱范数,即 AA^* 的最大特征值.令 $\nu_n = \ln\|A_n\|/n$,如果它的极限存在,记 $\gamma = \gamma(E,v) = \lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n$.

令 Ψ 是(3.4.1)式的解,则从

$$\frac{\|\Psi_n^{(1)}\|^2+\|\Psi_n^{(2)}\|^2}{2}\leqslant\|A_n\|^2\leqslant\|\Psi_n^{(1)}\|^2+\|\Psi_n^{(2)}\|^2$$

可推出,存在解 φ,ψ,使得:

$$\varphi^n\Leftrightarrow e^{n\gamma},\qquad n\to\infty,$$
$$\psi^n\Leftrightarrow e^{|n|\gamma},\qquad n\to-\infty.$$

值得注意的是,如果解 φ 使得:

$$\varphi_n\Leftrightarrow e^{-|n|\alpha},\qquad |n|\to\infty,\alpha>0,$$

那么,所有其他的解 ψ 的性态为:

$$\psi_n\Leftrightarrow e^{|n|\alpha},\qquad |n|\to\infty,$$

因 $W[\varphi,\psi] = \mathrm{const}$.由此得:

$$\gamma(E,v) = \alpha.$$

2.　周期势的离散 Schödinger 方程

下面简单地介绍势为周期的情形.这时有 $\nu_{n+p} = \nu_n$,周期 $p\geqslant 1$.令:

$$n = kp + m,\qquad 0\leqslant m\leqslant p,$$

我们有:

$$\begin{bmatrix}\psi_{n+1}\\ \psi_n\end{bmatrix} = A_n\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_0\end{bmatrix}$$

$$= A_m A_p^k \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{bmatrix}. \tag{3.4.5}$$

可得如下三种情形：

(1) $|\mathrm{tr}A_p(E)| \neq 2$，则存在非退化矩阵 P，使 $P^{-1}A_pP = \begin{bmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$，选取初值：

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.4.6}$$

那么，

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{bmatrix} &= A_m P \begin{bmatrix} \lambda^k & \\ & \lambda^{-k} \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{bmatrix} \\
&= A_m P \begin{bmatrix} \lambda^k & \\ & \lambda^{-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= A_m P \begin{bmatrix} \lambda^k & \\ & \lambda^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \lambda^k A_m \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

这里 k, m 是 n 的函数.

同样，选取：

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

又可得：

$$\begin{bmatrix} \varphi_{n+1} \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \lambda^{-k} A_m \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_0 \end{bmatrix}. \tag{3.4.7}$$

(a) 椭圆型. $\lambda = e^{i\alpha}$，$\alpha \neq n\pi$，且 $\mathrm{tr}A_p(E) = 2\cos\alpha$，$\psi_n, \varphi_n$ 是 Bloch 波. E 在最多为 p 个的"稳定区间"之一中，并且 $\gamma(E) = 0$.

(b) 双曲型. 不妨令 $|\lambda| > 1$. 这时 $|\mathrm{tr}A_p(E)| > 2$，

$$\psi_n = \lambda^{\left[\frac{n}{p}\right]} p_n, \quad \varphi_n = \lambda^{-\left[\frac{n}{p}\right]} q_n,$$

且 p_n, q_n 是周期为 p 的序列. $\gamma(E) = \ln|\lambda|/p$. E 在一个"禁隙"中.

(2) 抛物型.这时存在酉矩阵 U,使 $U^{-1}A_pU=\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 1\end{bmatrix}$,$a\neq 0$.分别取初值:

$$\begin{bmatrix}\varphi_1\\\varphi_0\end{bmatrix}=U\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\psi_1\\\psi_0\end{bmatrix}=U\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

则可得:

$$\begin{bmatrix}\varphi_{n+1}\\\varphi_n\end{bmatrix}=A_m\begin{bmatrix}\varphi_1\\\varphi_0\end{bmatrix},\tag{3.4.8}$$

及

$$\begin{bmatrix}\psi_{n+1}\\\psi_n\end{bmatrix}=\alpha\left[\frac{n}{p}\right]\begin{bmatrix}\varphi_{n+1}\\\varphi_n\end{bmatrix}A_m\begin{bmatrix}\psi_1\\\psi_0\end{bmatrix}.\tag{3.4.9}$$

我们有 $\gamma(E)=0$,E 是稳定区间的边界点.

(3) $A_p(E)=\pm 1$,则对任何初值都有:

$$\begin{bmatrix}\varphi_{n+1}\\\varphi_n\end{bmatrix}=A_m\begin{bmatrix}\varphi_1\\\varphi_0\end{bmatrix}.\tag{3.4.10}$$

E 是一个"禁隙"的闭包.

3.4.2　Schödinger 算子的谱测度

1.　Schödinger 算子的谱

对于非周期势$\{\nu_n\}$的情形,通过谱的研究,确定(3.4.1)式的解的物理性质.

令:

$$l^2(\mathbf{Z})=\left\{\psi:\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\psi_n|^2<\infty\right\}=\mathscr{H},\tag{3.4.11}$$

$\mathscr{H}$按照内积

$$<\varphi,\psi>=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{\varphi}_n\psi_n$$

是 Hilbert 空间.对 $\psi\in\mathscr{H}$,定义算子 H,使得:

$$(H\psi)_n=\psi_{n-1}+\psi_{n+1}+\nu_n\psi_n,$$

由(3.4.1)式,$H\psi=E\psi$.故 H 是$\mathscr{H}$自共轭算子.设$\{\nu_n\}$是有界的,则 H 的

谱集是：

$$\zeta(H) = \{E : E - H \text{不可逆或} (E - H)^{-1} \text{无界}\}$$

$$= \{E : \psi \in \mathscr{H} \text{使} (E - H)\varphi = \psi \text{ 在 } \mathscr{H} \text{无唯一解}\}. \quad (3.4.12)$$

$\zeta(H)$ 是 $\mathbf{R}$ 中的非空闭集. 在周期势的情形, 它是一些稳定闭区间的并集, 即：

$$\{E \in \mathbf{R} : |\operatorname{tr}A_p(E)| \leqslant 2\}.$$

如果 $E \in \zeta(H)$, 并且 E 是 $\zeta(H)$ 的孤立点, 那么 E 是 H 的特征值, 即存在 $0 \neq \varphi \in \mathscr{H}$, 使得：

$$H\varphi = E\varphi,$$

相应的 φ 称为特征向量. $\zeta(H)$ 的子集 $\zeta_p(H) = \{E : E \text{ 是 } H \text{ 的特征值}\}$ 称为 H 的点谱, $\zeta_c(H) = \{E \in \zeta(H) : E \text{ 是 } \zeta(H) \text{ 的非孤立点}\}$ 称为 H 的本性谱.

如果 H 的特征向量形成 $\mathscr{H}$ 的一组基, 那么 H 有纯点谱, 这时,

$$\zeta(H) = \overline{\zeta_p(H)}. \quad (3.4.13)$$

令 $\{\varphi^{(i)}\}$ 为 H 的特征向量集, $\mathscr{H}_p$ 是由 $\{\varphi^{(i)}\}$ 张成的子空间, $\mathscr{H}_c = \mathscr{H}_p^{\perp}$ 是 $\mathscr{H}_p$ 在 $\mathscr{H}$ 中的正交补. 如果 $\mathscr{H}_c = \{0\}$, 则显然 H 的谱是纯点谱; 如果 $\mathscr{H}_c \neq \{0\}$, 那么 H 具有连续谱. 事实上, $H|_{\mathscr{H}_c}$ 也是自共轭的, 且 $\zeta(H|_{\mathscr{H}_c}) - \zeta_c(H) \neq \varnothing$, 而且 $\dim\mathscr{H}_c = \infty$ (当 $\mathscr{H}_c \neq \{0\}$). 现在, 我们有：

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_p \oplus \mathscr{H}_c, \quad (3.4.14)$$

$$\zeta(H) = \overline{\zeta_p(H)} \cup \zeta_c(H). \quad (3.4.15)$$

如果 H 有纯点谱, 则 H 可作分解：

$$H = \sum_{E \in \zeta_p(H)} E P_E,$$

这里,

$$P_E^* = P_E = P_E^2,$$

$$P_E P_{E'} = \delta_{E,E'} P_E,$$

$$\sum_{E \in \zeta_p(H)} E P_E = id.$$

按照物理学的观念, 若 E 是非退化的特征值, φ 是其特征向量, 则 $P_E = |\langle\varphi, \varphi\rangle|$ 且 $\|\varphi\| = 1$; 如果 E 是退化的, 那么 $P_E = \sum_{H\varphi' = E\varphi'} |\langle\varphi', \varphi'\rangle|$,

但 $<\varphi^i,\varphi^j>=\delta_{i,j}$.

如果 H 有连续谱,令:

$$P^p=\sum_{E\in\zeta_p(H)} E\,P_E,\tag{3.4.16}$$

则 P^p 是在 $\mathscr{H}_p$ 上的正交射影,而且

$$P_c=id-P^p\tag{3.4.17}$$

是在 $\mathscr{H}_c$ 上的射影.

2. Schódinger 算子的谱测度

令 Δ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个区间,取特征函数:

$$\chi_\Delta(x)=\begin{cases}1, & 当\ x\in\Delta,\\ 0, & 当\ x\notin\Delta,\end{cases}\tag{3.4.18}$$

易得:

$$\chi_\Delta(E)=\overline{\chi_\Delta(E)}=\chi_\Delta(E)^2,$$

则从(3.4.16)式及(3.4.17)式可以定义谱射影:

$$\chi_\Delta(H)=\chi_\Delta(H)^*=\chi_\Delta(H)^2=P(\Delta).$$

容易验证:

$$P(\Delta)H=H\,P(\Delta),$$

从而$P(\Delta)\mathscr{H}$是 H 的一个不变子空间,并且当$\Delta\cap\zeta(H)=\varnothing$时,$P(\Delta)\mathscr{H}=\{0\}$.

令$P(E)=P((-\infty,E])$,如果 $E_1<E_2$,那么,我们有:

$$P(E_1)-P(E_2)=P((E_1,E_2])\geqslant 0,$$

可知,P 是一单调增函数.于是我们可以定义关于 $\zeta(H)$ 的 $\mathbf{R}$ 上的射影值测度:

$$\begin{aligned}dP(E)&=P(E+dE)-P(E)\\&=P((E,E+dE]).\end{aligned}$$

并且一般的谱分解写为 $H=\int E\,dP(E)$.

于是,对任意 $\psi\in\mathscr{H}$及 H 的连续函数f(例如 $f(H)=H,e^{itH},e^{-\beta H}$),

$$\begin{aligned}<\psi,f(H)\psi>&=\int f(H)d<\psi,P(E)\psi>\\&=\int f(E)d\|P(E)\psi\|^2.\end{aligned}\tag{3.4.19}$$

而 $\mu_\psi(E) = \| P(E)\psi \|^2$ 也是 E 的增函数，它定义 $\mathbf{R}$ 上一个关于 ψ 的谱测度 $d\mu_\psi(E)$. 现在令 $\psi \in \mathscr{H}_p$，那么，

$$P(E)\psi = \sum_{E_i \leq E} < \varphi^{(i)}, \psi > \varphi_i, \qquad \| \varphi^{(i)} \| - 1, \quad (3.4.20)$$

$$\| P(E)\psi \|^2 = \sum_{E' \leq E} \| < \varphi^{(i)}, \psi > \|^2, \quad (3.4.21)$$

以 $\{e_j\}$ 表示所有不同特征值的集合，令：

$$a_j = \sum_{\substack{H\varphi^{(i)} = e_j\varphi^{(i)}, \\ < \varphi^{(i)}, \varphi^{(j)} > = \delta_{i,j}}} \| < \varphi^{(i)}, \psi > \|^2, \quad (3.4.22)$$

这时，

$$\| P(E)\psi \|^2 = \sum_j a_j \Theta(E - e_j), \quad (3.4.23)$$

这里 $\Theta(E - e_j) - \begin{cases} 1, \text{如果 } e_j \leqslant E \\ 0, \text{如果 } e_j > E \end{cases}$，故有：

$$\mathrm{d} \| P(E)\psi \|^2 = \sum_j a_j \delta(E - e_j)\, \mathrm{d}E. \quad (3.4.24)$$

可知，$\psi \in \mathscr{H}_p$ 当且仅当 $\mathrm{d} \| P(E)\psi \|^2$ 是离散的. 类似地，可以得到 $d \| P(E)\psi \|^2$ 是连续的，当且仅当 $\psi \in \mathscr{H}_c$，并且可进一步将 $\mathscr{H}_c$ 分解为绝对连续和奇异连续的直和来考虑测度的奇异连续及绝对连续[24-26].

3.4.3　结合代换的迹映射

1.　结合代换的迹多项式和迹映射

对于代换序列的离散 Schödinger 算子谱的研究，结合代换（自由群的自同态）的迹映射是一个强有力的工具，例如参考文献[27]—[36].

令 $A, B \in SL_2(\mathbf{C})$，由 Cayley - Hamilton 定理，有：

$$A^2 - (\mathrm{tr}A)A - 1, \quad (3.4.25)$$

及

$$AB + BA = (\mathrm{tr}B)A + (\mathrm{tr}A)B + \mathrm{tr}AB - \mathrm{tr}A\,\mathrm{tr}B. \quad (3.4.26)$$

于是，记：

$$x = \mathrm{tr}A, y = \mathrm{tr}B, z = \mathrm{tr}AB,$$

那么，如果 M 是一些 A, B 矩阵的乘积，则有整系数多项式 $P_1, P_2, P_3, P_4 \in$

$\mathbf{Z}[x,y,z]$,使得:

$$M = P_1(x,y,z)A + P_2(x,y,z)B + P_3(x,y,z)AB + P_4(x,y,z). \tag{3.4.27}$$

特别地,$\mathrm{tr}M \in \mathbf{Z}[x,y,z]$.

令 $\mathscr{A} = \{a,b\}$ 是字母集,$\mathscr{F}$ 是由它生成的自由群. 令 φ 是 $\mathscr{F}$ 到 $SL_2(\mathbf{C})$(或 $SL_2(\mathbf{R})$)的同态:

$$\varphi(a) = A, \qquad \varphi(b) = B \in SL_2(\mathbf{C}),$$

并且记:

$$\begin{aligned} T(\varphi) &= (\mathrm{tr}\varphi(a),\mathrm{tr}\varphi(b),\mathrm{tr}\varphi(c)) \\ &= (x,y,z). \end{aligned} \tag{3.4.28}$$

那么,由(3.4.27)式,对于 $w \in \mathscr{A}$,存在 $P_w(x,y,z) \in \mathbf{Z}[x,y,z]$,使得:

$$\mathrm{tr}\varphi(w) = P_w(T(\varphi)). \tag{3.4.29}$$

我们把 P_w 称为词 w 的迹多项式.

令 σ 是 $\mathscr{F}$ 的一个自同态(或 $\mathscr{A}$ 上的一个代换). 那么复合映射 $\varphi \circ \sigma$ 仍是 F 到 $SL_2(\mathbf{C})$ 的同态. 于是,再由(3.4.28)式可得:

$$T(\varphi \circ \sigma) = (\mathrm{tr}\varphi(\sigma(a)),\mathrm{tr}\varphi(\sigma(b)),\mathrm{tr}\varphi(\sigma(ab))).$$

注意到 $\sigma(a)\sigma(b) = \sigma(ab)$,即可推出:

$$\begin{aligned} T(\varphi \circ \sigma) &= (P_{\sigma(a)}(x,y,z),P_{\sigma(b)}(x,y,z),P_{\sigma(ab)}(x,y,z)) \\ &= \Phi_\sigma(T(\varphi)), \end{aligned}$$

这里 $\Phi_\sigma \in (\mathbf{Z}[x,y,z])^3$ 称为结合代换(结合自由群的自同态)σ 的迹映射.

例3.4.1 σ 是 Fibonacci 代换,则有:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\varphi(\sigma(a)) &= \mathrm{tr}\varphi(ab) = z, \\ \mathrm{tr}\varphi(\sigma(b)) &= \mathrm{tr}\varphi(a) = x, \\ \mathrm{tr}\varphi(\sigma(ab)) &= \mathrm{tr}\varphi(aba) \\ &= \mathrm{tr}(\varphi(a))^2\mathrm{tr}\varphi(b) \\ &= \mathrm{tr}((x\varphi(a) - 1)\varphi(b)) \\ &= \mathrm{tr}(x\varphi(ab) - \varphi(b)) \\ &= xz - y, \end{aligned}$$

即:

$$\Phi_\sigma = (z,x,xz - y).$$

例3.4.2　σ 是 Thue - Morse 代换，则有：

$$\Phi_\sigma = (z, z, x^2 + y^2 - xyz - 2).$$

2．　迹映射的基本性质

迹映射的一些基本性质如下：

(1) 如果 σ, ν 都是 $\mathscr{F}$ 的自同态，那么，

$$\Phi_{\sigma \circ \nu} = \Phi_\sigma \circ \Phi_\nu. \tag{3.4.30}$$

特别地，$\Phi_{\sigma^n} = \Phi_\sigma^n$，它在 Schödinger 算子的谱的确定中扮演重要的角色.

(2) 如果 σ 是可逆代换[8]，那么 Φ_σ 的 Jacobi 行列式 $\det\Phi'_\sigma = \pm 1$.

(3) 对于 $w \in \mathscr{F}, P_{\sigma(w)} = P_w \circ \Phi_s$ igma.

(4) 如果 σ, τ 都是 $\mathscr{F}$ 的自同构(可逆)，那么下述条件是等价的：

(a) $\Phi_\sigma = \Phi_\tau$；

(b) $M_\sigma = \pm M_\tau$，这里 $M_\sigma = (|\sigma(a)|_\beta - |\sigma(a)|_{\beta-1})_{\alpha,\beta \in \mathscr{A}}$，

(c) $\exists\, w \in \mathscr{F}$，使得 $\tau(a) = w\sigma(a)w^{-1}, \tau(b) = w\sigma(b)w^{-1}$，或 $\tau(a) = w\sigma(a)^{-1}w^{-1}, \tau(b) = w\sigma(b)^{-1}w^{-1}$.

3．　同态迹映射

我们对作为代数自同态的迹映射进行如下讨论[32]. 令：

$$\begin{aligned}\lambda(x,y,z) &= \det(\varphi(a)\varphi(b) - \varphi(b)\varphi(a)) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 4.\end{aligned} \tag{3.4.31}$$

我们知道[31,32]，矩阵 $\varphi(a)$ 和 $\varphi(b)$ 有公共特征方向，当且仅当 $\lambda(x,y,z) = 0$. 又因为 $\varphi(a)$ 和 $\varphi(b)$ 有公共特征方向，可推出 $\varphi\sigma(a)$ 和 $\sigma\varphi(b)$ 也有公共特征方向，从而存在 $Q_\sigma \in \mathbf{Z}[x,y,z]$，使得：

$$\lambda \circ \Phi_\sigma = Q_\sigma \lambda. \tag{3.4.32}$$

我们称 λ 为迹映射的不变因子，而且：

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{C}^3: \quad \lambda(x,y,z) = 0\} \tag{3.4.33}$$

是 Φ_σ 的不变子空间($\Omega \subset \Phi_\sigma$).

关于不变因子及 Q_σ，有如下结果：

(1) $Q_\sigma = 1$，当且仅当 σ 可逆.

(2) $Q_\sigma \equiv 0$，当且仅当 σ 不是单射(当且仅当存在 $w \in \mathscr{F}$，使得 $\sigma(a) =$

$w^n, \sigma(b) = w^m, m, n \in \mathbf{Z}$).

(3) $Q_\sigma(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta) = (\det M_\sigma)^2$,这里 $\varepsilon, \eta = \pm 1$.

(4) $Q_\sigma(0,0,0) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } \det M_\sigma \text{ 为偶}, \\ 1, & \text{如果 } \det M_\sigma \text{ 为奇}. \end{cases}$

(5) $\Phi_\sigma(0,0,0) = (0,0,0)$,当且仅当 $\det M_\sigma$ 为奇数.

Φ_σ 在 Ω 上的动力性态可参考文献[36],[37].

多字母的迹映射涉及到由迹等式决定的代数流形.以 3 个字母为例,令:

$$X = (x_1, x_2, x_3), \qquad Y = (y_1, y_2, y_3),$$

及

$$\begin{aligned} P(X,Y) &= X \cdot Y - x_1 x_2 x_3, \\ Q(X,Y) &= X \cdot X + Y \cdot Y \\ &\quad - x_1 x_2 y_3 - x_1 x_3 y_2 - x_2 x_3 y_1 + y_1 y_2 y_3 - 4. \end{aligned}$$

记:

$$A(X,Y,z) = z^2 - P(X,Y)z + Q(X,Y). \tag{3.4.34}$$

那么,当我们取:

$$\begin{aligned} X &= (\mathrm{tr}A_1, \mathrm{tr}A_2, \mathrm{tr}A_3), \\ Y &= (\mathrm{tr}A_2A_3, \mathrm{tr}A_1A_3, \mathrm{tr}A_1A_2), \\ z &= \mathrm{tr}A_1A_2A_3, \end{aligned} \tag{3.4.35}$$

必有:

$$A(X,Y,z) \equiv 0. \tag{3.4.36}$$

现在取代数流形 $V \equiv \{(X,Y,z) \in \mathbf{C}^7; A = 0\}$,那么,如果 σ 是 $\{a, b, c\}$ 生成的自由群 $\mathscr{F}_3$ 的自同态(或 $\mathscr{F}$ 的 3 元代换),则存在唯一的代数流形 V 到 V 的多项式映射 Φ_σ,使得 $T(\varphi \circ \sigma) = \Phi_\sigma(T\varphi)$,这里 φ 是 $\mathscr{F}_3$ 到 $SL_2(\mathbf{C})$ 的同态.

一般地,n 元代换的迹映射的独立变量个数是 $3n - 3$[33,34].

关于高阶矩阵的迹映射,可参考文献[35].

例 3.4.3 Fibonacci 链:$\Phi_\sigma = (z, x, xz - y)$,又令 $\Phi_{\sigma^n} = (x_n, y_n, z_n)$.

对于 $A_n(E) = T_{|\sigma^n(a)|} \cdots T_1$,有 $\mathrm{tr}A_n(E) = x_n$.于是,

$$\begin{aligned} (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) &= \Phi_\sigma(x_n, y_n, z_n) \\ &= (z_n, x_n, x_n z_n - y_n). \end{aligned}$$

从而

$$x_{n+1} = z_n = x_{n-1} z_{n-1} - y_{n-1}$$
$$= x_{n-1} x_n - x_{n-2},$$

以及初值 $x_0 = 1, x_1 = E - \nu_a, x_2 = E - \nu_b$.

对于势由代换序列确定的 Schödinger 算子 H,我们有:

$$\zeta(H) \subset \overline{\bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq k} \Lambda_n},$$

这里 $\Lambda_n = \{E : P_{\sigma^n(a)}(E) = 2\}$. 在多数较好的条件下,上式的包含符号正好是等号.

在确定 H 的谱的 Lebesgue 测度等问题上,缩简的迹映射[38] 更为方便,它由 Φ_σ 各分量的首项[36] 来确定. 例如,以 $\widetilde{\Phi}_\sigma$ 表示 σ 的缩简迹映射,则有:

$$\Phi_\sigma = (z, x, xz - y), \qquad \widetilde{\Phi}_\sigma = (z, x, xz);$$

$$\Phi_\sigma = (z, z, xyz - x^2 - y^2 + 2), \qquad \widetilde{\Phi}_\sigma = (z, z, xyz).$$

关于迹映射的首项,我们有:

设 $\omega = a_1 a_2 \cdots a_n \in \mathscr{A}^*, a_i \in \mathscr{A}$. 以 γ 表示 $a_1 a_2 \cdots a_n a_1$ 中 ab 出现的个数,那么 $P_w(x, y, z)$ 的首项为 $x^{|w|_a - \gamma} y^{|w|_b - \gamma} z^{\gamma}$.

3.4.4 若干结果

用缩简的迹映射可以证明[38],对非常长本原代换,如果它的缩简迹映射中变量 x, y, z 的指数矩阵含有本原子矩阵块,则它的代换链的能谱是奇异连续的,并且其 Lebesgue 测度为零.

1. Fibonacci 链

(1) $\zeta(H) = \{E : \{P_{\sigma^n(a)}(E)\}_{n \geq 1}$ 有界$\} = \zeta_c(H)$.

(2) $\gamma(E : \omega = 0) = 0, \forall E \in \zeta(H)$.

(3) $\sigma(H)$ 是 Lebesgue 测度为零的 Cantor 集,其谱测度也是奇异连续的.

2. Toeplitz 代换链:$a \to ab, b \to aa$.

(1) $\zeta(H) = \{E : \gamma(E) = 0\} = \zeta_c(H)$;

(2) $\sigma(H)$ 是 Lebesgue 测度为零的 Cantor 集,其谱测度也是奇异连续的.

3. Thue – Morse 链. $\sigma(H)$ 是 Lebesgue 测度为零的 Cantor 集,并且其谱

测度是奇异连续的.但对 Rudin - Shapiro 链,则所知甚少.

参考文献

[1]D. Schechtman, I. Blech, D. Gratias, and J. Cahn, Metallic Phase with Long Range Orientational Order and no Translation Symmetry, Phys. Rev. Lett. ,1984(53):1951 - 1954

[2]N G. de Bruijn, Algebraic Theory of Penrose's Nonperiodic Tillings of the Plane, Kon. Ned· erl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. ,1981(84):38—66

[3]N. G. de Bruijn, Quasicrystals and Their Fourier Transform, Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. 1986, A(48):123—152

[4]N. G. de Bruijn, Modulated Quasicrystals, Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. ,1987, A (90):121 - 132

[5]A. Katz and M. Duneau, Quasiperiodic Patterns and Icosahedral Symmetry, Journal de Phys. ,1986(47):181 - 196

[6]J. Peyrière, Z. X. Wen and Z. Y. Wen, On the Dynamic Behaviours of the Itertions of the Trace Map Associated with Substitutive Sequences, Nonlinear Problems in Engineering and Science, Science Press, Beijing ,1992:259—266

[7]L. Levitov and J. Rhyner, Crystallography of Quasicrystals: Applications to Icosahedral Symmetry, J. Phys. , France, 1988(49):1835—1849

[8]Z. X. Wen and Z. Y. Wen, A Local Isomorphism of the Invertible Substitutions, C. R. Acad. Sci. Paris, 1994, t(318): 299—304

[9]M. Queffélec, Substitution Dynamical System - Spectral Analysis, Springer Verlag, 1987

[10]文志雄、文志英,代换序列研究概况,数学进展,1989,18(3):270—293

[11]E. Bombieri and J. Taylor, Quasicrystals, Tilings, and Algebraic Number Theory: Some Preliminary Connections, Contemporary Mathematics 1987(64):164—241

[12]J. M. Dumont, Number Theory and Physics, Springer - Berlin, 1990: 195—194

[13]S. Aubry, C. Godrèche and J. M. Luck, Scaling Properties of a Structrue Intermediate between Quasiperiodic and Random, J. Stat. Phys. ,1988(51):1033—1075

[14]Z. X. Wen Z. Y. Wen et. al, Remarques Surla Suite Engendrée Par des Substitutions Composées, Ann. Fac. des Sci. Toulouse, 1988, IX(1):56—65

[15]M. Barnsley, Fractals Everywhere, Academic Press, 1988

[16]J. M. Luck, C. Godrèche, A. Janner and T. Janssen, The Nature of the Atomic Surfaces of Quasiperiodic Self - Similar Structures, J. Phys. Math. Gen ,1993, A(26):1951—1999

[17]C. Godrèche and J. M. Luck, Anniversary Adriatico Research Conf. On Quasicrystals, World Scientific, Singapore, 1992:144—160

[18]K. Falconer, Fractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications, John Wiley & Sons, 1991

[19]J. M. Luck, Cantor Spectra and Scaling of Gap Widths in Deterministic Periodc Systens, Phys Rev., 1989, B(39):5834 5849

[20]S. Ostlund, R. Pandit, D. Rand, H. J. Schllnbuber and E. D. Siggia, Schödinger Equation with an Almost Perriodic Potential, Phys. Rev. Lett., 1983(50), 18739—1976

[21]M. Kohmoto and Y. Oono, Cantor Spectrum for an Almost Periodic Schödinger Equation and a Dynamical Map, Phys. Rev. Lett., 1984(102):145

[22]M. Kobmoto, B. Sutherland and C. Tang, Number Theory and Physics, Phys. Rev., 1983, B (35):1020

[23]Z. Y. Wen, F. Wijnands and J. Lamb, A Nature Class of Generalized Fibonacci Chains, J. Phys., 1994, A(27):3689—3706

[24]J. Bellissard, A. Bovier and J. M. Ghez, Spectral Properties of a Tighe Binding Hamiltonian with Period Doubling Potrential, Commun. Math. Phys., 1991(135):379—399

[25]J. Bellissard, Schödinger Operator with an Almost Periodic Potentinal, Mathematical Problens in Theoretical Physics, Lectuer Notes in Phys., Springer - Berlin, 1982

[26]J. Bellissar, R Lima, D. Testart, Almost Periodic Schodinger Operator, Mathematics + Physics, Lectures on Recent Results, World Scientiific, Singapore, 1985(1):1—64

[27]J. P. Allouchеet, J. Peyrière, Sur Une Formule de RéCurrence Sur Les Traces de Produits de Matrices Associés à Certaines Substitutions, C. R. Acad. Sci., Paris, 1986(Ⅱ):1135—1136

[28]M. Kolár and F. Nori, Trace Maps of General Substitutional Sequences, Phys. Rev., 1990, B(42):1062—1065

[29]F. Axel, J. P. Allouche, J P. Kléman, M. Mendès France and J. Peyrièer, Vibrational Modes in an One - Dimentional "Quasi - Alloy", the Morse Case, J. de Phys., 1986, C(3):181—187

[30]F. Axel, J. P. Allouche and Z. Y Wen, On Certain Properties of High - Resolution X - Ray Diffraction Spectra of Finite - Sioze Generalized Rudin - Shapiro Multilayer Beterostruchure, J. of Phys. Condens Matter, 1992(4):8713—8728

[31]J. Peyrière, On the Trace Map for Products of Matrices Associated with Substitutive Sequences, J. Stat. Phys., 1991, 62(1/2):411—414

[32]J. Peyrière, Z. X. Wen, Z. Y. Wen et. al, Les Proprietes ed l'Application de Traces Sur Une Algèbre Associative Noncommutaive, Preprint, 1987

[33]J. Peyrière, Z. X. Wen, Z. Y. Wen et. al, Polynomes Associées Aux Endomorphismes de Groupes Librds, L'Enseig. Math., 1993, t(39): 153—175

[34]Z. X. Wen, Relations Polynomiales Entre Les Traces de Produits de Matrices, C. R. Acad. Sci., Paris, 1994, t(318): 99 104

[35]Z. X. Wen, Les Applications ed Traces Sur $M(3, K)$ Associées Aux Substitutions, Thése Université de Paris, Sud. Orsay, 1991

[36]Z. X. Wen and Z. Y. Wen, On the Leading Term and the Degree of the Polynomital Trace Mapping Associated with a Substitution, J. Stat. Phys., 1994, 75(3/4): 627 -641

[37]A. G. Roberts and M. Bake, Tracemaps as 3D Reversible Dynamical Systems with an Invariant, J. Stat. Phys., 1994, 74(3/4): 829—888

[38]A. Bovier and J. M. Ghez. Spectral Properties of One – Dimensional Schödinger Operators with Potentials Generated by Substitutons, Preprint, 1992

第四章
分形空间

4.1 预备知识

与分形几何理论有关的数学问题的研究已有很长的历史，可以追溯到 Cantor 和 Weierstrass 等著名数学家的有关工作．本世纪 20 年代末，分形几何在物理和信号处理领域中获得重要应用，更促使其快速发展．1967 年，美籍科学家B. B. Mandelbrot 在美国《科学》杂志上发表“英国的海岸线有多长?”的著名论文，并且在 1977 年和 1982 年发表著作“Fractal: Form, Chance and Dimension”和“The Fractal Geometry of Nature”[1]，他的成果获得美国科学大奖沃尔夫奖．他的新思想和创造性工作为分形几何的研究开辟了新方向，成为现代分形学研究的开端．现代分形学（简称为分形学）的生存和发展与计算机科学是分不开的，这也是它与经典分形几何的重要区别之一．

我们首先描述分形集（或分形图形）的一些典型性质，这些性质在第一章中是通过对 Koch 曲线特性的分析得到的．

设 F 为这样的集合，它的局部性质与整体性质都具有相当的复杂性，不适宜或不能用传统的几何与分析工具来刻画和研究，而需要作为分形学的研究对象．也就是说，现代分形学的研究对象已超越传统数学的研究对象，也远远超越

传统数学的观念、规律和方法. 这种 F 的结构的复杂性主要体现在以下几个方面：

(1) F 具有“细”结构, 亦即 F 的特性包含在它的任意小的细分之中.

(2) F 不再有经典的导数, 而且它的不可微性质不随其无限小细分而消失.

(3) F 的量度（长度、面积、体积等）在传统尺度（如 Lebesgue 测度）下成为平庸情形（零或无穷）, 然而在某些特定的尺度（如 Hausdorff 测度、Packing 测度、Bouligand 测度等）之下却有新的意义. 由这些特定尺度产生的“分形维数”成为刻画 F 的重要工具之一.

(4) F 的生成具有某种可遵循的规律, 可能是近似的或是统计的, 例如, F 具有自相似性质, 或具有自仿射性质, 或 F 可由某种迭代过程或递归方式产生.

这几个方面在一定程度上刻画了分形集的特性.

本章介绍以下几个方面：预备知识；分形空间的性质及其中的变换；Gibbs - Butzer 导数；代码空间与迭代函数系 IFS；分形空间中的分形维数等.

4.1.1 局部紧群与局部域

1. 局部紧群

作为预备知识, 我们首先介绍有关局部紧 Vilenkin 群的概念.

这里所说的局部紧群 G, 是指具有非平凡、非散拓扑结构的、全不连通的局部紧拓扑群, 简称 G 具有全断型拓扑结构. 具体地说：

定义 4.1.1 设 G 为局部紧 Abel 群, 满足如下条件：G 包含一个严格递减的、开的紧子群序列 $\{G_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, 使得：

(i) $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} G_n = G$ 且 $\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} G_n = \{0\}$;

(ii) $2 \leqslant M = \sup\{\mathrm{order}(G_n / G_{n+1}) : n \in \mathbf{Z}\} < \infty$.

可以证明, 满足这样条件的 G 是具有非平凡、非散拓扑结构的、全不连通的零维局部紧拓扑群, 我们称其为 Vilenkin 群.

众所周知的 Walsh 函数系是一个非常重要的例子. 事实上, 若赋予数直线 $\mathbf{R}^+$ 以全断型拓扑, 则得到一个 Vilenkin 群 $G = \mathbf{R}^+$, 其结构如下：取 G 为半直

线$[0,\infty)$，其中元素具有“加法”运算“+”，即：

$$x+y=(x_j+y_j \bmod 2), \tag{4.1.1}$$

G 的零元 $0\in G$ 有基本邻域滤系 $\mathscr{B}=\{\mathscr{B}_k : k\in \mathbf{Z}\}$，其中：

$$\mathscr{B}_k=\{y\in G : y=(y_k,y_{k+1},\cdots),\quad y_k\in\{0,1\},k\in \mathbf{Z}\}, \tag{4.1.2}$$

于是，G 构成一个局部紧 Vilenkin 群．这是$[0,\infty)$上的另一种拓扑结构，它完全不同于作为1维欧氏空间的 $\mathbf{R}$ 上的通常 ε－邻域拓扑，而 Walsh 函数系正是此 G 的特征群(特征群的定义见下面的定义 4.1.3)．

2．　*局部域*

另一个重要特例是局部域 K，包括 p－级数域、p－adic 数域以及它们的有限代数扩张．

定义 4.1.2　若 K 为局部紧、非平凡、非散、全不连通的拓扑域，K 中的元 x 可赋予非 Archimed 范数 $|x|$，满足：

(i) $|x|=0$ 当且仅当 $x=0$，这里 $x=0$ 是 G 的零元；

(ii) $|xy|=|x||y|$；

(iii) $|x+y|\leqslant \max\{|x|,|y|\}$，

就称 K 为局部域．K 的生成元 $\beta\in K$ 满足 $|\beta|=q^{-1}$，这里 $q=p^c$，p 为素数，$c\geqslant 1$ 为整数．K 中的单位球

$$D=\{x\in K : |x|\leqslant 1\}$$

是 K 的整环；集合

$$\{x\in K : |x|\leqslant q^{-1}\}$$

是 D 中唯一的极大理想；集合

$$\{x\in K : |x|\leqslant q^{-k}\},\qquad k\in\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$$

是 D 中的分数理想；而

$$y+\{x\in K : |x|\leqslant q^{-k}\}$$

是 D 中以 y 为中心、以 q^{-k} 为半径的球[2]．

对于具有加法运算(4.1.1)式与基本邻域滤系(4.1.2)式的集合 $G=[0,\infty)$，若再定义 $G-\{0\}$ 上的乘法：

$$xy=(x_iy_j+x_{i-1}y_{j+1}+\cdots+x_{i-n}y_{j+n} \bmod g), \tag{4.1.3}$$

则 G 就构成一个局部域．

3. 局部紧群上的测度

对于一般的局部紧 Vilenkin 群 G，根据其上 Haar 测度的存在性，可设 μ 为 G 上的 Haar 测度，满足 $\mu(G_0)=1$ 与 $\mu(G_n)=m_n^{-1}$，$n\in\mathbf{Z}$. 进而，如果我们假设 $\kappa_n=\mathrm{order}(G_n/G_{n+1})\leqslant M$（$G_n/G_{n+1}$ 为商群），则 $m_{n+1}=\kappa_n m_n$. 对于 $x\in G$，有表示式：

$$x=x_n+x_{n+1}+\cdots,\qquad n\in\mathbf{Z},$$

其中 $x_j\in G_j\setminus G_{j+1}$，$j=n,n+1,\cdots$，且若 $x_n\neq 0$，则 $|x|=m_n^{-1}$.

定义 4.1.3　设 Γ 是群 G 上的有界乘法函数所成的集合，$\xi\in\Gamma$，$\xi: G\to C$，满足 $(\xi,x)\in\{z\in C: |z|=1\}$，并且对于 $\xi,\eta\in\Gamma$ 成立：

$$(\xi,x+y)=(\xi,x)+(\xi,y),\quad x,y\in G,$$
$$(\xi+\eta,x)=(\xi,x)+(\eta,x),\quad x,y\in G,$$

则称 Γ 为 G 的特征群. 据 Понтрягин 对偶定理，当 G 为局部紧群时，Γ 也是局部紧的；而 G 为紧群时，Γ 是离散的. 我们把 (ξ,x) 记为 $\chi_\xi(x)$.

G_n 的"零化子"定义为：

$$\Gamma_n=\{\xi\in\Gamma:\chi_\xi(x)=1,\ \forall\, x\in G_n\},$$

于是 $\{\Gamma_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 成为 Γ 的一个严格递增的、开的紧子群序列，满足：

(i) $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty}\Gamma_n=\Gamma$，$\bigcap\limits_{n=-\infty}^{\infty}\Gamma_n=\{I\}$，

这里 I 是群 Γ 的单位元；

(ii) $\mathrm{order}(\Gamma_{n+1}/\Gamma_n)=\mathrm{order}(G_n/G_{n+1})$.

Γ 上的 Haar 测度记为 λ，可选取使其满足 $\lambda(\Gamma_0)=\mu(G_0)=1$ 与 $\lambda(\Gamma_n)=(\mu(G_n))^{-1}=m_n$，$n\in\mathbf{Z}$. 每个 $\xi\in\Gamma$ 可写为：

$$\xi=\xi_n+\xi_{n-1}+\cdots,\qquad n\in\mathbf{Z},$$

其中 $\xi_j\in\Gamma_j\setminus\Gamma_{j-1}$，$j=n,n+1,\cdots$，且若 $\xi_n\neq 0$，则 $|\xi|=m_n$.

如前所述，2 进 Walsh 系 $\{w_y(x): x,y\in G\}$ 其实就是群

$$G=\left\{x=\sum_{j=s}^{\infty}x_j2^{-j}: x\in\{0,1\},x_s\neq 0,s\in\mathbf{Z}\right\}\qquad(4.1.4)$$

的特征群.

关于局部紧群上调和分析的系统研究所获得的成果[3—11]，不仅体现了人们向 Vilenkin 群上 p – 进分析这个迥然不同于经典分析的数学分支开拓的思

想，而且预示了一套处理全断型问题的方法与技巧，从而打开了用局部紧群的观点来处理分形几何的一条通路.

4.1.2 初等拓扑的预备知识

还需要一些初等拓扑和泛函分析的预备知识.尽管其中许多知识读者都很熟悉，但为了方便起见，我们仍然列出来，备查用.

定义4.1.4 设 X 为一集合，其中的元素记为 $x,y,z,\cdots$.若任意两元素 $x,y\in X$ 都对应于一非负实数，记为 $d(x,y)$，满足：

(i) $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$;

(ii) $d(x,y)=d(y,x)$;

(iii) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,x)$,

则称 d 为 X 上的距离，并称 (X,d) 为距离空间.

定义 4.1.5 设 (X,d) 为距离空间.称 X 为连通空间，若 X 中的既开又闭的子集仅是 X 自身与空集 $\varnothing$. X 的子集 $A\subset X$ 称为连通集，若把 (A,d) 视为 (X,d) 的子空间时，(A,d) 是连通空间.

等价地，(X,d) 称为连通空间，若不存在 X 的一对非空开集 G 与 H，使得 $G\bigcup H=X,G\bigcap H=\varnothing$.

定义 4.1.6 设 (X,d) 为距离空间.称 X 为全不连通空间，或称为全断空间，若 X 中的非空连通子集仅由其单点集组成.

若 (X,d) 中存在一个邻域滤系基 $\mathscr{B}=\{B_\tau\}$，其中每个 B_τ 都是既开又闭的，则称 (X,d) 为零维空间.

定义 4.1.7 设 (X,d) 为距离空间.称 X 的子集 A 为局部连通集，若对任意的 $x\in A$，都存在 x 的连通邻域滤系基.

子集 A 称为路径连通的，若对于任一对 $x,y\in A$，存在一个连续映射 f: $[0,1]\to A$，使得 $f(0)=x,f(1)=y$，并称 f 为连结 x 与 y 的路径.若 A 不是路径连通的，就称它为路径不连通.

定义4.1.8 设 (X,d) 为距离空间.若子集 A 为路径连通的，且对于任一对 $x,y\in A$，以及连结 x,y 的任一对满足：

$$f_1(0)=f_2(0)=x,\qquad f_1(1)=f_2(1)=y$$

的连续映射 f_1,f_2，存在 $[0,1]\times[0,1]\to A$ 的连续映射 $g(s,t)$，使得：

$$\begin{cases} g(s,0) = f_1(s), & 0 \leqslant s \leqslant 1, \\ g(s,1) = f_2(s), & 0 \leqslant s \leqslant 1, \\ g(0,t) = x, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ g(1,t) = y, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

则称点 x 与点 y 是单连通的；若 A 中任意两点都是单连通的，则称 A 是单连通的．若 A 不是单连通的，则称其为复连通的．

定义4.1.9　设 (X,d) 为完备距离空间．称 X 为紧空间，若 X 的任一开覆盖 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 都存在有限子覆盖 $\{U_j\}_{j\in\{1,2,\cdots,n\}}$．

X 的子集 A 称为紧集，若 (A,d) 作为 (X,d) 的子空间是一个紧空间．

若 X 的每一点都有紧闭包邻域，则称 X 为局部紧空间．局部紧子集可仿照紧子集类似地定义．

其他有关预备知识，将在需要的时候补充．

4.2　分形空间的性质及其中的变换

本节及以后各节中，我们以 $(\mathbf{R}^n,d)$ 与 (K,d) 两个基本的完备距离空间为出发点，这里 $\mathbf{R}^n$ 与 K 分别为 n 维欧氏空间与局部域，$(\mathbf{R}^n,d)$ 与 (K,d) 中的 d 分别为 n 维欧氏空间与局部域上的距离．

4.2.1　分形空间

定义4.2.1　设 (X,d) 为完备距离空间．记：

$$\mathscr{H}(X) = \{A \subset X : A \text{ 为 } X \text{ 的紧子集}\}, \tag{4.2.1}$$

并约定 $\varnothing \notin \mathscr{H}(X)$．

对于任意一点 $x \in X$ 与任一集 $B \in \mathscr{H}(X)$，记：

$$d(x,B) = \min\{d(x,y) : y \in B\}, \tag{4.2.2}$$

称其为 x 到 B 的距离．

对任意一对集合 $A,B \in \mathscr{H}(X)$，记：

$$d(A,B) = \max\{d(x,B) : x \in A\}, \tag{4.2.3}$$

不难验证：

$$h(A,B) = \max\{d(A,B), d(B,A)\} \tag{4.2.4}$$

满足定义4.1.4 中距离的三个条件,我们称 $h(A,B)$ 为 $A,B \in \mathscr{H}(X)$ 的 Hausdorff 距离,并称$(\mathscr{H}(X),h)$ 为 Fractal 空间.

更一般地,我们定义:

定义4.2.2 设(X,d) 为完备距离空间.记:

$$\mathscr{L}\mathscr{H}(X) = \{A \subset X: A \text{ 为 } X \text{ 的局部紧子集}\}, \qquad (4.2.1)'$$

并约定 $\varnothing \notin \mathscr{L}\mathscr{H}(X)$.

对于任一点 $x \in X$ 与任一集 $B \in \mathscr{H}(X)$,记:

$$d(x,B) = \inf\{d(x,y): y \in B\}, \qquad (4.2.2)'$$

称其为 x 到 B 的距离.

对于任意一对集 $A,B \in \mathscr{H}(X)$,记:

$$d(A,B) = \sup\{d(x,B): x \in A\}, \qquad (4.2.3)'$$

我们称

$$h(A,B) = \max\{d(A,B), d(B,A)\} \qquad (4.2.4)'$$

为 $A,B \in \mathscr{L}\mathscr{H}(X)$ 的广义 Hausdorff 距离,并称$(\mathscr{L}\mathscr{H}(X),h)$ 为广义 Fractal 空间.

例4.2.1 在$(\mathbf{R},d)$ 中,取 $d(x,y) = |x-y|$,则:

$$\mathscr{H}(\mathbf{R}) = \{A \subset R: A \text{ 为 } R \text{ 的紧子集}\}.$$

由(4.2.2)式与(4.2.3)式定义 $d(A,B)$ 与 $d(B,A)$,并按(4.2.4)式定义 $h(A,B)$,从而得到 $\mathbf{R}$ 上的 Fractal 空间$(\mathscr{H}(\mathbf{R}),h)$.

由实变函数的知识,Cantor 三分集就属于$(\mathscr{H}(\mathbf{R}),h)$.

类似地,可定义$(\mathscr{H}(\mathbf{R}^n),h)$.

例4.2.2 在(K,d) 中,取 $d(x,y) = |x-y|$,这里:

$$d(x,y) = \begin{cases} ||x|-|y||, & |x| \neq |y|, \\ |x-y|, & |x| = |y|, x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases} \tag{4.2.5}$$

$|\cdot|$ 为 K 上的非阿基米德赋值,则:

$$\mathscr{H}(K) = \{A \subset K: A \text{ 为 } K \text{ 的紧子集}\}.$$

我们可证明:(4.2.5)式中的 d 是 K 上的距离,并且使(K,d) 成为完备

距离空间. 于是由(4.2.2)式与(4.2.3)式定义 $d(A,B)$ 与 $d(B,A)$, 并按(4.2.4)式定义 $h(A,B)$, 从而得到 K 上的 Fractal 空间($\mathscr{H}(K),h$).

类似地可得 K 上的广义 Fractal 空间($\mathscr{G}\mathscr{H}(K),h$).

我们可以在 Fractal 空间($\mathscr{H}(K),h$)中构造 Cantor 型集.

设 K 为 p - 级数域, p 为素数. 令:

$$\mathscr{A}_p = \mathscr{B}^0 \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} V_j \right), \tag{4.2.6}$$

其中,

$$\begin{aligned} V_1 &= \mathscr{B}^1 \cup (2\beta^0 + \mathscr{B}^1) \cup \cdots \cup ((p-2)\beta^0 + \mathscr{B}^1), \\ V_2 &= (\beta^0 + \mathscr{B}^2) \cup (\beta^0 + 2\beta^1 + \mathscr{B}^2) \cup \cdots \\ &\quad \cup (\beta^0 + (p-2)\beta^1 + \mathscr{B}^2) \cup \cdots \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

图4.2.1是当 $p=5$ 时局部域中的 $\mathscr{B}^0$ 的结构. 不难由此图得到 $\mathscr{A}_5$ 的图.

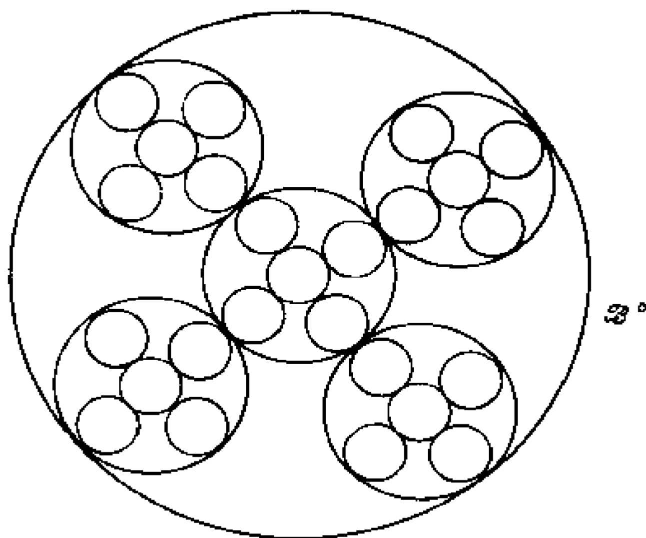


图 4.2.1　$p=5$ 时局部域中 $\mathscr{B}^0$ 的结构

4.2.2　基本空间中的变换

在分形几何的研究中, 各种变换(或映射)起着重要作用. 本节讨论今后经常遇到的几种变换, 并讨论它们的一些性质.

定义4.2.3　设(X, d_X)与(Y, d_Y)为两个完备距离空间，我们称X到Y的对应关系$f: X \to Y$为一个变换，如果对每个$x \in X$，有唯一的元$y \in Y$与之对应，记为$y = f(x)$.

对于X的子集S，我们称$f(S) = \{y \in Y : y = f(x), x \in X\}$为$S$的像集.

若$f(x_1) = f(x_2)$蕴含$x_1 = x_2$，则称映射f是一一对应的.

若$f(S) = S$，则称f是映上的.

若f既是一一对应又是映上的，则称f是可逆的，其逆映射记为f^{-1}. 连续映射的概念是大家熟悉的，此处不再赘述.

1. $\mathbf{R}^n$中常用的变换

(1)$\mathbf{R}^1$情形.

仿射变换$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = ax + b, \qquad a, b \in \mathbf{R} \text{ 为常数}.$$

当$a = 1$时，称为平移变换；当$b = 0$时，称为线性变换.

此变换把$\mathbf{R}^1$中的区间$[0,1]$变换为长度为$|a|$的区间$f(I)$，其左端点为b，右端点为$a + b$.

多项式变换$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

$a_0, a_1, a_2 \cdots, a_n \in \mathbf{R}$为常数，$a_n \neq 0$.

线性分式变换(Möbius变换)$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \qquad ad \neq bc.$$

约定：若$c \neq 0$，则$f(-d/c) = \infty$，$f(\infty) = a/c$；若$c = 0$，则$f(\infty) = \infty$.

(2) $\mathbf{R}^2$情形.

2维仿射变换$w: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$w(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2 + cx_1 + dx_2 + e + f), \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,$$

其中$a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$，或记为矩阵形式：

$$w(x) = w\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = Ax + t, \qquad (4.2.8)$$

这里，$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$为 2×2 矩阵，$t = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$为常列向量.

2 维仿射变换有明显的几何意义.

若把(a,c)与(b,d)视为 $\mathbf{R}^2$ 中的点，用极坐标表示为：

$$a = r_1\cos\theta_1, \quad c = r_1\sin\theta_1,$$

$$b = r_2\cos\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right), \quad d = r_2\sin\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right),$$

则：

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1\cos\theta_1 & -r_2\sin\theta_2 \\ r_1\sin\theta_1 & r_2\cos\theta_2 \end{bmatrix}. \tag{4.2.9}$$

因此，2 维仿射变换把 x_1 轴旋转 θ_1 角，x_2 轴旋转 θ_2 角，然后再平移到 t.

我们称 2 维仿射变换为 2 维相似变换，若 $r = r_1 = r_2, \theta_1 = \theta_2$；或者 $r = r_1 = r_2, \theta_1 = \theta_2 + \pi$. 亦即 2 维相似变换的 A 呈如下形式：

$$A = \begin{bmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}, \tag{4.2.10}$$

或

$$A = \begin{bmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ r\sin\theta & -r\cos\theta \end{bmatrix}, \tag{4.2.11}$$

对于(4.2.10)式与(4.2.11)式，有 $A = \pm 1$，此时称其为正交变换. 而当(4.2.10)式中 $r = 1$ 时，变换称为旋转；当(4.2.11)中 $r = 1, \theta = 0$ 时，变换称为反射.

(3) $\mathbf{C}$ 情形.

Riemann 曲面上的 Möbius 变换：

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad ad \neq bc, z, a, b, c, d \in \mathbf{C}.$$

$\mathbf{C}$ 上的二次变换：

$$f(z) = az^2 + bz + c, \quad a \neq 0, a, b, c \in \mathbf{C}.$$

$\mathbf{C}$ 上的解析变换 $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ 称为解析的，若对每个 $z_0 \in \mathbf{C}$，存在相似变换：

$$w(z) = az + b, \qquad a, b \in \mathbf{C}.$$

这里 a, b 依赖于 z_0，使得：

$$\frac{d(f(z), w(z))}{d(z, z_0)} \to 0, \quad 当\ z \to z_0.$$

亦即,**C**上的解析变换是连续的,并且局部地是相似变换.若 $a = 0$,则称 z_0 为临界点,$f(z_0)$ 称为临界值.

(4) (X,d) 上的变换集 $\mathscr{F}$.

定义4.2.4 设:

$$\mathscr{F} = \{f: f \text{ 是 } X \text{ 到 } X \text{ 的变换}\},$$

亦即$\mathscr{F}$是(X,d)上所有变换所成的集.在$\mathscr{F}$上定义运算"∘",它是两个变换的复合 $f \circ g$,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \qquad x \in X,$$

$i: x \to x$ 是 $\mathscr{F}$的单位元,$\mathscr{F}$在运算"∘"下成为一个不可换的半群.

如果半群 $\mathscr{F}$中的每一个元 f 都存在逆元 $f^{-1} \in \mathscr{F}$,则称 $\mathscr{F}$ 为一个群.

定义 4.2.5 设 $f \in \mathscr{F}$,我们称映射(即变换)$f^{0n}: X \to X, n \in P$,为 f 的前 n 迭代,若对任一个 $x \in X$,有:

$$f^{00}(x) = x,$$
$$f^{01}(x) = f(x),$$
$$\cdots,$$
$$f^{0n}(x) = f \circ f^{0(n-1)}(x) = f(f^{0(n-1)}(x)).$$

若 f 是1—1映射,我们称映射 $f^{0(-n)}: X \to X, n \in P$,为 f 的后 n 迭代.后 n 迭代与逆变换有如下关系:对任一个 $x \in X$,有:

$$f^{0(-1)}(x) = f^{-1}(x),$$
$$f^{0(-2)}(x) = (f^{02})^{-1}(x),$$
$$\cdots,$$
$$f^{0(-n)}(x) = (f^{0n})^{-1}(x).$$

对于 f 的前 n 迭代,我们有:

$$f^{0m} \circ f^{0n} = f^{0(m+n)}.$$

例 4.2.3 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x$, $x \in \mathbf{R}$

易见,对前 n 迭代我们有:

$$f^{00}(x) = x, f^{01}(x) = 2x, f^{02}(x) = 2^2 x, \cdots, f^{0n}(x) = 2^n x, \cdots,$$

例 4.2.4 $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1, x_2^2 + x_1)$.

前 n 迭代有：

$$f^{00}(x)=(x_1,x_2),$$
$$f^{01}(x)=(2x_1,x_2^2+x_1),$$
$$f^{02}(x)=(4x_1,(x_2^2+x_1)^2+2x_1),$$
$$\cdots,$$

例4.2.5 考虑几何级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} ba^n = b+ba+ba^2+ba^3+\cdots, \tag{4.2.12}$$

其中 $0<a<1,b>0$.

令 $I_0=[0,b]$,作 $f(x)=ax+b$ 的前 n 迭代 $I_n=f^{0n}(I_0)$,则：

$$f^{00}(I_0)=I_0,$$
$$f^{01}(I_0)=I_1=[b,ab+b],$$
$$\cdots.$$

I_n 的左端点与右端点恰好为级数(4.2.12)的部分和：

$$I_n=[s_{n-1},s_n], \qquad n\geqslant 1,$$

其中 $s_n=\sum_{k=0}^{n} b\,a^k, s_0=b$.若令：

$$I=\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n,$$
$$I_n=\left[0,\frac{b}{1-a}\right],$$

则我们有：

$$f(I)=\left[b,\frac{b}{1-a}\right]=I-I_0.$$

2. 压缩映射

定义4.2.6 映射 $f:X\to X$ 称为完备距离空间 (X,d) 中的压缩映射,若存在常数 $s,0<s<1$,使得：

$$d(f(x),f(y))\leqslant s\,d(x,y), \qquad x,y\in X.$$

s 称为 f 的压缩因子.显见,压缩映射必是连续的.

定义4.2.7 若映射 $f:X\to X$ 为完备距离空间 (X,d) 上的映射,且存在

$x_f \in X$，使得 $f(x_f) = x_f$，则称 x_f 为 f 的不动点.

用逐次逼近法可以证明如下定理.

定理4.2.1　设(X,d)为完备距离空间，$f:X \to X$ 为具压缩因子 s 的压缩映射，则存在唯一的元 $x_f \in X$，使得：

$$\lim_{n\to\infty} f^{\circ n}(x) = x_f, \qquad x \in X.$$

此 x_f 就是 f 的不动点.

证明　存在性的证明主要利用不等式：

$$d(f^{\circ n}(x), f^{\circ m}(x)) \leqslant s^{m \wedge n} d(x, f^{\circ |n-m|}(x)), \qquad m, n \in \mathbf{P},$$

其中 $m \wedge n = \min(m, n)$，以及估计式：

$$\begin{aligned} d(x, f^{\circ k}(x)) &\leqslant d(x, f^{\circ 1}(x)) + d(f^{\circ 1}(x), f^{\circ 2}(x)) + \cdots \\ &\quad + d(f^{\circ(k-1)}(x), f^{\circ k}(x)) \\ &\leqslant (1 + s + s^2 + \cdots + s^{k-1}) d(x, f(x)) \\ &\leqslant \frac{1}{1-s} d(x, f(x)), \end{aligned}$$

从而，

$$d(f^{\circ m}(x), f^{\circ n}(x)) \leqslant s^{m \wedge n} \frac{1}{1-s} d(x, f(x)).$$

所以$\{f^{\circ n}(x)\}$是 X 中的Cauchy序列，由 X 完备性可知，不动点 x_f 存在，并且由于 f 是压缩映射，故连续. 于是我们有：

$$\begin{aligned} f(x_f) &= f(\lim_{n\to\infty} f^{\circ n}(x)) \\ &= \lim_{n\to\infty} f^{\circ(n+1)}(x) = x_f. \end{aligned}$$

唯一性的证明是由公式：

$$d(x_f, y_f) = d(f(x_f), f(y_f)) \leqslant s\, d(x_f, y_f)$$

及 $0 < s < 1$ 得到.

定义4.2.8　若映射 $w_n: X \to X$ 为完备距离空间(X,d)上的 N 个压缩映射，压缩因子为 s_n，$n = 1,2,\cdots,N$，则称$\{w_n : n = 1,2,\cdots,N\}$为一个迭代函数系(IFS)，并称 $s = \max\{s_n : n = 1,2,\cdots,N\}$为此 IFS 的压缩因子.

进而，对于任意 $B \in \mathscr{H}(X)$，我们定义IFS中诸像集 $w_n(B)$，$n = 1,2,\cdots,N$ 的并：

$$w(B) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(B),$$

显然，$w(B)\in\mathscr{H}(X)$．此映射 $w:\mathscr{H}(X)\to\mathscr{H}(X)$ 是距离空间$(\mathscr{H}(X),h)$中具有压缩因子 s 的压缩映射，也就是有：

$$h(w(B),w(C))\leqslant s\,h(B,C),\qquad B,C\in\mathscr{H}(X).$$

可以证明，w 的唯一的不动点 $A\in\mathscr{H}(X)$ 由

$$A=w(A)=\bigcup_{n=1}^{N}w_n(A)$$

确定，而且满足：

$$A=\lim_{n\to\infty}w^{0n}(B),\qquad B\in\mathscr{H}(X).$$

定义4.2.9 我们称上述不动点 A 为该 IFS 的吸引子．

例4.2.6 取 $X=\mathbf{R}$，$\{\mathbf{R},w_1,w_2\}$为迭代函数系，其中：

$$w_1=\frac{1}{3}x,\qquad w_2=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3},$$

则 $w(B)=\bigcup_{n=1}^{N}w_n(B)$，$B\in\mathscr{H}(\mathbf{R})$，为具有压缩因子 $s=1/3$ 的压缩映射．

若取 $B=[0,1]$，则：

$$B_n=w^{0n}(B),\qquad n=1,2,\cdots$$

便是Cantor集的构造中第 n 次取出的区间．不难证明，$\lim\limits_{n\to\infty}B_n=A$ 就是经典的Cantor集．进而，还可得到：

$$A=\frac{1}{3}A\bigcup\left\{\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}\right\},$$

其中 $xA=\{xy:y\in A\}$，$A+x=\{y+x:y\in A\}$．

3. 几个定理

在结束本节之前，我们给出几个有用的定理．

定理4.2.2 设(X,d)为完备距离空间，$f:X\to X$ 为连续映射，序列$\{x_n\}\subset X$ 收敛到 $x\in X$，则：

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x).$$

定理4.2.3 设(X_1,d_1)，(X_2,d_2)为两个完备距离空间，$f:X_1\to X_2$ 为连续映射．若 $E\in\mathscr{H}(X)$ 为紧集，则 $f:E\to X_2$ 为一致连续的．也就是说，对任一 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得当 $d_1(x,y)<\delta$ 时，有：

$$d_2(f(x),f(y))<\varepsilon,\qquad x,y\in E.$$

定理4.2.4　设(X_1,d_1),(X_2,d_2),(X_3,d_3)为三个完备距离空间,f:$X_1\times X_2\to X_3$为满足下述条件的映射:对任一$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使得:

(i) $d_1(x_1,y_1)<\delta$蕴含$d_3(f(x_1,x_2),f(y_1,x_2))<\varepsilon$,$x_1,y_1\in X_1$,$x_2\in X_2$;

(ii) $d_2(x_2,y_2)<\delta$蕴含$d_3(f(y_1,x_2),f(y_1,y_2))<\varepsilon$,$x_1\in X_1$,$x_2,y_2\in X_2$,

则f在距离空间$(X_1\times X_2,d)$上连续,这里,

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\max(d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2)).$$

定理4.2.5　设(X_1,d_1),(X_2,d_2)为完备距离空间,又设乘积空间为$(X,d)=(X_1\times X_2,d)$,这里$d=\max(d_1,d_2)$.若$K_1\subset X_1$,$K_2\subset X_2$分别为紧集,则$K_1\times K_2$为X中的紧集.

定理4.2.6　设(X_1,d_1),(X_2,d_2)为完备紧距离空间,又设f:$X_1\to X_2$为连续的、1－1对应的、映上的,则f是同胚映射.

4.2.3　空间$(\mathcal{H}(X),h)$中的压缩映射

1.　空间$(\mathcal{H}(X),h)$中压缩映射的性质

我们先介绍一些基本性质和定理.

性质4.2.1　对于$A,B\in\mathcal{H}(X)$,存在$\hat{x}\in A$,$\hat{y}\in B$,使得:

$$d(A,B)=d(\hat{x},\hat{y}).$$

性质4.2.2　对于$A,B\in\mathcal{H}(X)$且$B\subset A$,则:

$$d(x,B)\geqslant d(x,A).$$

性质4.2.3　对于$A,B\in\mathcal{H}(X)$,一般地,

$$d(A,B)\neq d(B,A).$$

性质4.2.4　对于$A,B,C\in\mathcal{H}(X)$,若$B\subset C$,则:

$$d(A,B)\geqslant d(A,C).$$

性质4.2.5　对于$A,B,C\in\mathcal{H}(X)$,则:

$$d(A\bigcup B,C)=d(A,C)\bigcup d(B,C).$$

性质4.2.6　对于$A,B,C\in\mathcal{H}(X)$,有:

$$d(A,B)\leqslant d(A,C)+d(C,B).$$

性质4.2.7　对于 $A,B \in \mathcal{H}(X)$，有：

$$h(A,B) = d(A,B) \vee d(B,A).$$

性质4.2.8　对于 $A,B,C,D \in \mathcal{H}(X)$，有：

$$h(A \cup B, C \cup D) \leqslant h(A,C) \vee h(B,D).$$

性质4.2.9　当 (X,d) 是完备距离空间时，$(\mathcal{H}(X),h)$ 是具有 Hausdorff 距离 h 的完备距离空间.

定义4.2.10　$(\mathcal{H}(X),h)$ 中的 Cauchy 序列 $\{A_n: n = 1,2,\cdots\}$ 定义为：对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N \in \mathbf{N}$，使得当 $n,m > N$ 时，有 $h(A_n,A_m) \leqslant \epsilon$.

定理4.2.7　设 (X,d) 为完备紧距离空间，$f: X \to X$ 为压缩映射，则函数序列 $\{f^{0n}(X)\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $(\mathcal{H}(X),h)$ 中的 Cauchy 序列，且有：

$$\lim_{n\to\infty} f^{0n}(X) = \{x_f\},$$

x_f 为 f 的不动点.

定理4.2.8　设 $w: X \to X$ 是具有压缩因子 s 的压缩映射，我们定义映射 $w: \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ 为：

$$w(B) = \{w(x) \in X: x \in B\}, \qquad B \in \mathcal{H}(X),$$

则 w 也是一个具有压缩因子 s 的 $(\mathcal{H}(X),h)$ 上的压缩映射.

定理4.2.9　若映射 $w_n: X \to X$，$n = 1,2,\cdots,N$ 是完备距离空间 (X,d) 上的 N 个压缩映射，其压缩因子为 s_n，$n = 1,2,\cdots,N$，则称 $\{w_n: n = 1,2,\cdots,N\}$ 为一个迭代函数系(IFS). 若定义映射 $w: \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ 为：

$$w(B) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(B), \quad B \in \mathcal{H}(X),$$

则 w 也是一个具有压缩因子 $s = \max\{s_n: n = 1,2,\cdots,N\}$ 的 $(\mathcal{H}(X),h)$ 上的压缩映射.

定理 4.2.10　若 $\{w_n: n = 1,2,\cdots,N\}$ 为完备距离空间 (X,d) 上的一个迭代函数系，则具有压缩因子 $s = \max\{s_n: n = 1,2,\cdots,N\}$ 的压缩映射 $w: \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ 为：

$$w(B) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(B), \qquad B \in \mathcal{H}(X),$$

满足：

$$h(w(B),w(C)) \leqslant sh(B,C), \qquad B,C \in \mathcal{H}(X),$$

且它有唯一的不动点 $A \in \mathcal{H}(X)$，满足：

$$A = w(A) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(A).$$

2.　拼图定理

定义4.2.11　设 $L \in \mathcal{H}(X)$ 为一个给定的紧集. 对任给的正数 $\varepsilon > 0$，我们称迭代函数系 $\{w_n: n = 0,1,2,\cdots,N\}$ $(0 \leqslant s_n < 1, s_0 = 0)$ 为C迭代函数系(CIFS)，若它满足：

$$h\left(L, \bigcup_{n=1}^{N} w_n(L)\right) \leqslant \varepsilon.$$

定理4.2.11　设函数系 $\{w_n\}$ 为C迭代函数系，则 $h(L,A) \leqslant \varepsilon/(1-s)$，这里 A 是该C迭代函数系的吸引子. 或等价地，我们有：

$$h(L,A) \leqslant (1-s)^{-1} h\left(L, \bigcup_{n=1}^{N} w_n(L)\right), \qquad L \in \mathcal{H}(X).$$

由上述拼图定理可知，为使迭代函数系 IFS $\{w_n: n = 0,1,2,\cdots,N\}$ 的吸引子 A 与给定的集 L 任意接近(在Hausdorff距离下)，必须使此给定的集 L 与它在此IFS下的"像"或"拼图" $\bigcup_{n=1}^{N} w_n(L)$ 任意接近. 另一方面，拼图定理的应用是很灵活的，尤其是定理的等价形式的使用.

例4.2.7　设 IFS 为：

$$\left\{\mathbf{R}; w_1(x) = \frac{1}{2}x, w_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right\}, s = \frac{1}{2}.$$

这是一个 CIFS，它的吸引子为[0,1]. 由于：

$$h\left(L, \bigcup_{n=1}^{2} w_n(L)\right) \leqslant \varepsilon,$$

故 $h(L,A) \leqslant \varepsilon/(1-\varepsilon)$. 于是我们可得到一个"拼图" $\left[0,\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2},1\right]$.

对于具有两个仿射变换的 IFS 为 $\{\mathbf{R}; w_1(x) = ax + b, w_2(x) = cx + d\}$，可取某个区间 L，作 $\bigcup_{i=1}^{2} w_i(L)$，利用 $h\left(L, \bigcup_{i=1}^{2} w_i(L)\right)$ 的大小来估计 $h(L,A)$ 的大小. 可见拼图定理的应用是很广泛的.

拼图定理的证明并不困难，只要利用如下引理即可.

引理4.2.1　设 (X,d) 为完备距离空间. 若 $f: X \to X$ 是具压缩因子 $0 \leqslant$

$s<1$ 的压缩映射，其不动点为 $x_f\in X$，则：

$$d(x,x_f)\leqslant(1-s)^{-1}d(x,f(x)),\qquad x\in X.$$

4.3　Gibbs－Butzer 导数

4.3.1　局部域上的 Gibbs－Butzer 导数

不存在经典意义下导数的函数仍然有变化率问题，然而原有的导数概念对于研究这种函数的变化率却无能为力，因而，寻求新的变化率概念自然成为研究方向．

1．Gibbs－Butzer 导数（G－B 导数）

1967 年英国数学物理学家 J.E.Gibbs 首先引入所谓“逻辑导数”的概念[12]，1972 年加拿大籍德国数学家 P.L.Butzer 对 2 进情形加以简化和完善，他的定义如下：

定义4.3.1　设 $f:G\to C$，这里 G 是由（4.1.4）式定义的 $G=(0,\infty)$ 上的另一种拓扑．如果极限

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{j=0}^{N}2^{j-1}[f(x+2^{-j-1})-f(x)]\tag{4.3.1}$$

在点 $x\in G_0=(0,1)$ 存在，则称其为 f 在 x 的 G－B 导数，记为 $f^{<1>}(x)$．1977 年，我国郑维行与苏维宜把定义推广到 p 进情形，并定义了其逆运算——“逻辑积分”，证明了许多有意义的性质[10]．

G－B 导数可视为在经典意义下不可导函数（不光滑甚至不连续）的一种大范围的变化率．现在我们介绍 G－B 导数的一种积分形式，它是用所谓的拟微分算子定义的[5]．

定义4.3.2　设 $f:G\to C$ 是 G 上的 Haar 可积函数，令：

$$<\xi>=\begin{cases}\max(1,|\xi|), & \xi\neq 0,\\ 0, & \xi=0.\end{cases}$$

若对 $\rho\geqslant 0$，积分

$$T_{<\cdot>^{\rho}}f(x)=\int_{\Gamma}\left|\int_{G}<\xi>^{\rho}f(t)\chi_{\xi}(t-x)\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}\xi\tag{4.3.2}$$

当 $x\in G$ 存在，则称其为 f 在 x 处的 ρ 阶（按点）G－B 导数，记为 $f^{<\rho>}(x)$．

2.　求 G－B 导数的两个例子

(1) 对于 Walsh 函数 $f(x) = w_y(x), x, y \in G$，由定义 4.3.1 可得：

$$f^{<1>}(x) = y w_y(x). \tag{4.3.3}$$

(2) 对于 3 进 Cantor 函数（又称魔鬼的阶梯）$\theta_3(x)$，可以用局部域 G 的特征函数表示，其表示式为[9]：

$$\theta_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{6^r} \Lambda(j_0)\cdots\Lambda(j_{-r+1})(1 - \omega^{j_r}) w_j(x). \tag{4.3.4}$$

其中，

$$w_j(x) = \exp \frac{2\pi i}{3}(x \odot y),$$

$$\omega = \exp \frac{2\pi i}{3},$$

$$x \odot y = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j y_{1-j},$$

而且，

$$\Lambda(j) = \begin{cases} 2, & j = 0, \\ \exp\left(-\frac{2\pi i}{3} j\right), & j = 1,2. \end{cases} \tag{4.3.5}$$

我们有[7]：

定理4.3.1　级数(4.3.4)有 G－B 导数：

$$\theta_3^{<1>}(x) = -\frac{1}{12}\left\{\sum_{r=0}^{N}\sum_{j=3^r}^{3^{r+1}-1} \frac{j}{6^r}\Lambda(j_0)\cdots\Lambda(j_{-r+1})(1 - \omega^{j_r})\right\} w_j(x). \tag{4.3.6}$$

因为级数(4.3.6)一致收敛，故 $\theta_3(x)$ 的 G－B 导数由此级数确定.

G－B 导数的拟微分算子形式的定义不仅便于计算，而且当把它看作"运算"时，对于 G 上的检验函数类 $\mathscr{S}(G)$ 和基本函数类 $S(G)$ 是封闭的，因此可以把导数概念推广到检验函数类 $\mathscr{S}(G)$ 的分布空间 $f \in \mathscr{S}'(G)$ 上. 我们还可以定义导数 $f^{<p>}$ 的逆运算，并证明许多有用的性质[5].

由以上讨论可知，G－B 导数可以用来刻画分形函数的变化率. 利用这个新的概念，我们可以研究很多有兴趣的问题，关于这些，读者可参考文献[13]，[3]，[7]，[8]，[10]，[11].

4.3.2 具有分形边界的 G－B 微分方程

我们考虑如下具有分形边界的 G－B 微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{<2>} u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^{<2>} u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^{<2>} u}{\partial y^2} \\ u\mid_{t=0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial^{<1>} u}{\partial t}\right|_{t=0} = \phi(x, y), \\ u\mid_{\Gamma} = 0. \end{cases} \tag{4.3.7}$$

其中 Γ 是变形的 Koch 曲线. 可求得其解：

$$u(x, y, t) = \lim_{k\to\infty} u_k(x, y, t),$$

这里 $u_k(x, y, t)$ 是下述第 k 次近似方程的解：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{<2>} u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^{<2>} u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^{<2>} u}{\partial y^2} \\ u\mid_{t=0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial^{<1>} u}{\partial t}\right|_{t=0} = \phi(x, y), \\ u\mid_{\Gamma_k} = 0. \end{cases} \tag{4.3.7$'$}$$

其中 Γ_k 是 Koch 曲线的第 k 次近似，且有：

$$u_k(x, y, t) = \sum_{m_k, n_k} A_{m_k, n_k} \mathrm{cal}\left(\sqrt{m_k^2 + n_k^2}, t\right) \mathrm{sal}(m_k, x) \mathrm{cal}(n_k, y)$$

$\{m_k\}$, $\{n_k\}$ 是确定的序列；系数 A_{m_k, n_k} 依赖于 ϕ, m_k, n_k；cal, sal 分别是偶的和奇的 Walsh 函数. 当 $k \to \infty$ 时，u_k 的极限是改进的 Weierstrass 曲线，它是一条分形曲线.

图4.3.1 是方程(4.3.7)与(4.3.7)$'$的边界示意图，它是 $k = 2^4$ 的变形 Koch 曲线.

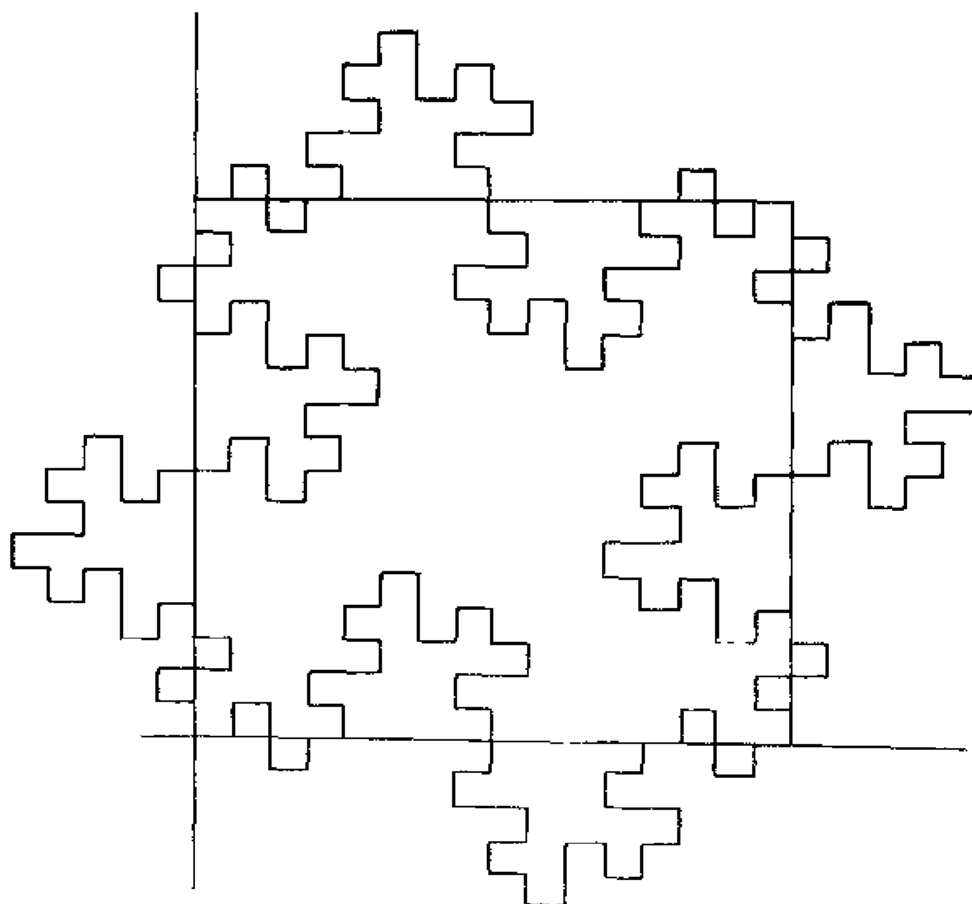


图4.3.1　$k=2^4$ 的变形 Koch 曲线

4.4　代码空间与迭代函数系 IFS

我们仍然考虑完备的距离空间(X,d)及其上的分形空间$(\mathscr{H}(X),h)$，或空间$(\mathscr{L}\mathscr{H}(X),h)$.

4.4.1　代码空间(Σ,d_c)

在 4.2 节中已给出了完备距离空间(X,d)中迭代函数系 IFS 的定义(定义 4.2.9)，并指出其不变集 A，即其吸引子存在且唯一. 现在我们引进所谓的代码空间来表示 A 中的点.

定义 4.4.1 通常称可数集 S 为符号集，其中的元称为符号，这里可数集 S 是指：S 或者是空集，或者存在一个 1—1 的映上变换 $\varphi: I \to S$，其中 $I \in \{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\},\cdots,\{1,2,\cdots,n\},\cdots,\{1,2,\cdots\}\}$.

我们称 Σ 为符号集 S 上的代码集，若其元素 $\omega \in \Sigma$ 可表示为：

$$\omega = \omega_1\omega_2\omega_3\cdots, \qquad \omega_j \in S, j = 1,2,3,\cdots.$$

在实际应用中，符号集取为 $S = \{1,2,\cdots,N\}, N \in \mathbf{N}$. 此时，在 S 的代码集 Σ 上可引进距离：

$$d_c \equiv d_{\text{code}} = d(\omega,\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\omega_n - \sigma_n|}{(N+1)^n}, \qquad \omega,\sigma \in \Sigma, \quad (4.4.1)$$

其中 $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3\cdots, \sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\cdots, \omega_j, \sigma_j \in S$，而 $|\omega_j - \sigma_j|$ 是 $\omega_j - \sigma_j$ 的绝对值. 显然，(Σ, d_c) 成为一个距离空间，称为代码空间.

代码空间有以下重要性质：

定理4.4.1 代码空间(Σ, d_c)是一个紧距离空间，且 Σ 中的元是不可数的.

定理4.4.2 代码空间(Σ, d_c) 中有一个与(4.4.1) 式等价的距离

$$\overline{d}_c(\omega,\sigma) = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n - \sigma_n}{(N+1)^n} \right|, \qquad \omega,\sigma \in \Sigma. \qquad (4.4.2)$$

这些定理都有严格证明，此处我们从略.

4.4.2 IFS 吸引子的表示法

1. 吸引子 A 与代码空间的关系

为建立迭代函数系IFS的吸引子 A 与代码空间的关系，先给出两个引理.

引理4.4.1 设$\{X; w_1,\cdots,w_N\}$是完备距离空间(X,d) 中的 IFS，则对任一个紧集 $K \in \mathscr{H}(X)$，存在紧集 $\widetilde{K} \in \mathscr{H}(X)$，使得 $K \subset \widetilde{K}$，而且有：

$$w_n: \widetilde{K} \to \widetilde{K}, \qquad n = 1,2,\cdots,N.$$

换言之，完备距离空间(X,d) 的迭代函数系$\{\widetilde{K}; w_1,\cdots,w_N\}$ 的基本空间 $\widetilde{K}$ 是紧集.

引理4.4.2 设$\{X; w_1,\cdots,w_N\}$ 是完备距离空间(X,d) 中具有压缩因子 s 的 IFS，而(Σ, d_c) 是与该 IFS 相关的代码空间，亦即，Σ 的符号集是 $S = \{1,2,\cdots,N\}$，而

$$d_c(\omega,\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\omega_n - \sigma_n|}{(N+1)^n}, \quad \omega,\sigma \in \Sigma,$$

若对任一组 $\sigma \in \Sigma, n \in \mathbf{N}, x \in X$,定义一映射 $\varphi \to \Sigma \times \mathbf{N} \times X \to X$,

$$\varphi(\sigma,n,x) = w_{\sigma_1} \circ w_{\sigma_2} \circ \cdots \circ w_{\sigma_n}(x).$$

设 $K \in \mathscr{H}(X)$,则存在 $D > 0$,使得对于 $(\sigma,m,x_1),(\sigma,n,x_2) \in \Sigma \times \mathbf{N} \times X$,有:

$$d(\varphi(\sigma,m,x_1),(\varphi(\sigma,n,x_2)) \leqslant D s^{m \wedge n}.$$

定理4.4.3 设 $\{X; w_1,\cdots,w_N\}$ 是完备距离空间 (X,d) 中的 IFS,A 是它的吸引子. 又设 (Σ,d_c) 是与该 IFS 相关的代码空间. 对于 $\sigma \in \Sigma, n \in \mathbf{N}, x \in X$,令:

$$\varphi(\sigma,n,x) - w_{\sigma_1} \circ w_{\sigma_2} \circ \cdots \circ w_{\sigma_n}(x),$$

则极限

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(\sigma,n,x) \equiv \varphi(\sigma) \tag{4.4.3}$$

存在,且 $\varphi(\sigma) \in A$,并与 $x \in X$ 无关. 又若 $K \in \mathscr{H}(X)$,则上述收敛性在 K 上关于 x 是一致的,而且映射 $\varphi:\Sigma \to A$ 是一个连续的、映上的映射.

这个定理的证明较长,我们只说一下其主要步骤.

第一步,证明极限(4.4.3)存在,并且收敛是一致的,而所确定的极限值 $\varphi(\sigma)$ 与 x 无关.

第二步,证明映射 $\varphi:\Sigma \to A$ 连续.

第三步,证明 φ 是映上的.

2. 吸引子 A 的表示

现在可以利用代码空间给出 IFS 吸引子 A 的"地址"了.

定义4.4.2 设 $\{X; w_1,\cdots,w_N\}$ 是完备距离空间 (X,d) 中的 IFS,A 是它的吸引子. 又设 (Σ,d_c) 是与该 IFS 相关的代码空间,φ 是由(4.4.3)式确定的连续的、映上的映射. 我们称集合

$$\varphi^{-1}(a) = \{\omega \in \Sigma: \varphi(\omega) = a\}, \quad a \in A \tag{4.4.4}$$

中的任一个元为 $a \in A$ 的一个地址,而称 $\varphi^{-1}(a)$ 为 a 的地址集.

显然,如果(4.4.4)式中的集合 $\varphi^{-1}(a)$ 不是单点集,则 $a \in A$ 地址不唯一,这种情况在 A 的元的表示时将带来麻烦. 为此我们有:

定义4.4.3 我们称 $\{X; w_1,\cdots,w_N\}$ 为全断 IFS,如果集合 $\varphi^{-1}(a)$ 是

单点集.此时 A 中的点 a 有确定的、唯一的地址,记为 $\omega_a = \varphi^{-1}(a)$.

$\{X; w_1, \cdots, w_N\}$ 称为恰切的 IFS,如果它不是全断的,且存在开集 Q,使得它的吸引子 $A \subset Q$,并且满足:

(i) $w_i(Q) \bigcap w_j(Q) = \varnothing, i, j \in \{1, 2, \cdots, N\}, i \neq j$;

(ii) $\bigcup_{i=1}^{N} w_i(Q) \subset Q$,

简称 A 满足开集条件.从这里可以看到开集条件的来历.

IFS 称为交迭的,如果它既不是全断的,又不是恰切的.

定理4.4.4　设 $\{X; w_1, \cdots, w_N\}$ 为 IFS,每个 w_j 都具有逆映射.又设其吸引子为 A,则 IFS 为全断的,当且仅当:

$$w_i(A) \bigcap w_j(A) = \varnothing, \qquad i, j \in \{1, \cdots, N\}, i \neq j.$$

此定理的证明可由定义推出.

例4.4.1　IFS:

$$\left\{[0,1]; w_1(x) = \frac{1}{3}x, w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right\}$$

是全断的.

显然,w_1 与 w_2 都是可逆映射,其吸引子 A 为 Cantor 三分集,满足 $w_i(A) \bigcap w_j(A) = \varnothing$,因而此 IFS 是全断的.

4.4.3　IFS 吸引子的维数及算法

现在介绍 $\mathbf{R}$ 中几种 IFS 吸引子维数的算法.

算法4.4.1 ($Y-G$"不动点"排除算法[11,14])　设 ε 是屏幕精度.给定迭代函数系 $\{X; w_1, \cdots, w_N\}$ 与相应的压缩因子 s_i.设 $B_i, i = 1, 2, \cdots$ 为有限集合,并设 $W(A) = \bigcup w_i(A)$.

(i) 选取适当的 $B_0 \subset A (\subset X)$,计算:

$$N = \left[\frac{\ln(\varepsilon / h(A, B_0))}{\ln s}\right] + 1,$$

$$B_1 = W(B_0) - X_j.$$

其中 X_j 见参考文献[11],[14];

(ii) 对 i 等于 2 到 N,计算 $B_i = W(B_{i-1})$;

(iii) 对 j 等于 1 到 $N+1$,将 B_{j-1} 投影到屏幕上.

这里,$h(A,B_0)$ 为集合 A,B_0 之间的 Hausdorff 距离,X_W 为 W 的所有吸引子的集合. $s=\max\{s_i: i=1,2,\cdots,N\}$, $W(B_0)=\bigcup_{i=1}^{N} w_i(B_0)$. $\bigcup_{i=1}^{N+1} B_{i-1}$ 即为 A 的分形逼近集.

对上述算法,我们有:

定理4.4.5 设$\{X;w_1,\cdots,w_N\}$为具有相应的压缩因子 s_i 的 IFS,而且 A 为其吸引子. 对任意的 $B_0\subset A(\subset X)$,由算法4.4.1产生的集列 $B_i, i=1,2,\cdots,N$,必成立:

$$\lim_{N\to\infty}\bigcup_{i=0}^{N} B_i = A.$$

算法4.4.2(Y-G"重点"排除算法[11,14]) 设 ϵ 是屏幕网格精度. 给定迭代函数系$\{X;w_1,\cdots,w_N\}$与相应的压缩因子 s_i. 设 R 是此网格上的舍入算子,Q 为其复源算子. $B_i,\overline{B_i},\overline{\overline{B_i}}(i=0,1,2,\cdots)$ 均为有限集合.

(i) 对于任意的 $B_0\subset A(\subset X)$,令 $i=1$,集合$\overline{\overline{B_0}}=B_0$;

(ii) 计算 $R(W(\overline{\overline{B}}_{i-1}))$ 并存入集合 $\overline{B}_0$,同时在屏幕上描绘 $\overline{B}_0$;

(iii) 计算$\overline{B_i}-\bigcup_{j=0}^{i-1}\overline{B_0}$,并存入集合 B_i;

(iv) 不妨设 $R(x_1),R(x_2),\cdots,R(x_p)\in\bigcup_{j=0}^{i}\overline{B_i}$ 是属于同一像元中的 p 个点,再设 $R(x_1)\in B_i$,则对 j 从 1 到 m,对 k 从 2 到 p,判断 $R(w_i(x_k))$ 和 $R(w_i(x_1))$ 两者的关系:若相等,则计算 $Q(B_i)$,并存入集合$\overline{\overline{B_i}}$;否则有$\overline{\overline{B_i}}=Q(B_i)\bigcup Q(R(x_k))$;

(v) 终止准则的判定:若$\overline{\overline{B_i}}$为空集,则结束运算,否则,$i=i+1$ 转(ii)继续.

类似地,我们有:

定理4.4.6 设 R 是舍入算子,在给定屏幕精度 $\epsilon>0$ 下,$x\in X$,有:

$$d(x,R(x))<\epsilon,$$

Q 是 R 的复源算子,对 $x\in X$,有 $Q(R(x))=x$. 对于任意给定的 IFS 和非空集合 $B_0\subset A\subset B$,由"重点"排除算法而构造的集列$\overline{\overline{B_i}}, i=1,2,\cdots$,必存在整数 $L>0$,有:

$$(\bigcup_{i=0}^{L} \overline{B_i}) \bigcup E_k = A,$$

$$h(A, \bigcup_{i=1}^{L} \overline{B_i}) < \varepsilon,$$

$$E_k, \overline{B_i} \subset X, \qquad i = 1, 2, \cdots, L,$$

这样,就得到吸引子 A 的分形逼近集.

4.5 分形空间中的分形维数

如前所述,我们考虑完备的距离空间(X,d),并在其上定义 Fractal 空间$(\mathscr{L}(X),h)$ 或$(\mathscr{F}\mathscr{K}(X),h)$.它们是本节的主要研究对象.

4.5.1 局部域上的 Hausdorff 维数

分形维数是刻画分形集合与分形图形的重要指标之一.众所周知,目前常用的维数有 Hausdorff 维数、拓扑维数、Bouligand 维数、Steinhass 维数、Mendes France 维数、Besicovitch Taylor 维数、相似维数、Fourier 维数、容量维数、测度维数、连通维数等等.本节讨论局部域上的 Hausdorff 维数的定义及性质.

1. Hausdorff 测度

定义4.5.1 设 $U \subset K$ 是局部域K 中的非空集合,$|x|$是 $x \in K$ 的非 archimed 范数,我们称:

$$\sup\{|x-y|: x, y \in U\} \tag{4.5.1}$$

为 U 的 Haar 测度意义下的直径,记为 $|U|_d$.

例如,当 $U = x_0 + \mathscr{B}^k$ 时,$|U|_d = q^{-k}$.

又如,当 $U = \beta^{k-s} + \mathscr{B}^k$ 时,$|U|_d = q^{-k+s}, s > 0$

定义4.5.2 设 $E \subset K$ 为K 中子集,称 K 中的球族$\{U_j \subset K: |U_j|_d < \delta\}_{j=1}^{\infty}$ 为 E 的δ - 覆盖,如果 $E \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} U_j$.对于某个 $s \in (0,\infty)$,我们称:

$$H_\delta^s(E) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} |U_j|_d^s \tag{4.5.2}$$

为 E 的近似 Hausdorff 外测度.当 $\delta \to 0$ 时,$H_\delta^s(E)$ 是非减的.

定义4.5.3 如果极限

$$\lim_{\delta \to 0} H_\delta^s(E) \equiv H^s(E)$$

存在，则称其为 E 的 s 维 Hausdorff 外测度.

K 的子集 $E \subset K$ 称为 H^s 可测的，如果对 K 的任意子集 $A \subset K$ 都成立：

$$H^s(A) = H^s(A \cap E) + H^s(A - E). \tag{4.5.3}$$

此时，我们把外测度 H^s 称为 E 的 s 维 Hausdorff 测度，记为 $H^s(E)$.

与 $\mathbf{R}^n$ 情形类似，我们有：

定理4.5.1　如果存在 $s_0 \in (0,\infty)$，使得 $H^{s_0}(E) < \infty$，则对于所有 $s > s_0$，成立 $H^s(E) = 0$. 另一方面，若存在 $s_1 \in (0,\infty)$，使得 $H^{s_1}(E) > 0$，则对于 $s < s_1$ 有 $H^s(E) = \infty$.

2.　Hausdorff 维数

由定理4.5.1，我们可引入如下定义：

定义4.5.4　若对于 $E \subset K$，有：

$$H^s(E) = \begin{cases} \infty, & \text{当 } 0 < s < s_0, \\ 0, & \text{当 } s_0 < s < \infty, \end{cases} \tag{4.5.4}$$

则称 s_0 为 E 的 Hausdorff 维数，记为 $\dim_H E = s_0$.

类似地可定义 $E \subset K^n, n \in \mathbf{N}$ 的 Hausdorff 维数，且可验证 $\dim_H E \leqslant n$.

我们证明了 $\dim_H \mathscr{B}^k = 1$；构造了局部域上的 Cantor 三分集 F，并且证明了 Cantor 三分集 F 的 Hausdorff 维数为：

$$0 = \dim_T F < \dim_H F = \frac{\log 2}{\log 3},$$

其中 $\dim_T F$ 是局部域中集合 F 的拓扑维数. 对于 Koch 曲线 Γ，有：

$$0 = \dim_T \Gamma < \dim_H \Gamma = \frac{\log 4}{\log 3}.$$

对于局部域中集合的 Bouligand 等其他类型的维数，也可类似定义. 值得指出的是，诸多维数之间的关系，在局部域情形下可能变得很清楚，这是由局部域的结构所决定，有兴趣的读者可参考文献[2].

3.　*局部域上的 IFS 的吸引子的维数*

对于局部域 K 上的 IFS 的吸引子的维数，我们有如下两个结果.

定理4.5.2　设 $\{X; w_1, \cdots, w_N\}$ 为局部域 K 上的压缩相似映射族，如果这个压缩相似族 $\{w_1, \cdots, w_N\}$ 关于有界开集 $B \subset K$ 满足开集条件，则其吸引

子 A 的 Hausdorff 维数 $s = \dim_H A$ 由

$$\sum_{i=1}^{N} (r_i)^s = 1$$

确定,其中 r_i 是 w_i 的压缩因子.

定理4.5.3 设$\{X; w_1, \cdots, w_N\}$为局部域 K 上的压缩相似映射族,如果这个压缩相似映射族$\{w_1, \cdots, w_N\}$关于有界开集 $B \subset K$ 满足开集条件,则其吸引子 A 的 Hausdorff 维数 $\dim_H A$ 与 Bouligand 维数 $\dim_B A$ 相等.

由于局部域的结构比较特殊,开集条件和其他有关条件的改进都是有希望的.对这方面有兴趣的读者不难找到好的课题.

4.5.2 局部域上的其他维数

关于局部域上的其他分形维数,如拓扑维数、Bouligand 维数、Steinhass 维数、Mendes France 维数、Besicovitch Taylor 维数、相似维数、Fourier 维数、容量维数、测度维数、连通维数等,可类似于 $\mathbf{R}^n$ 上那样定义,并且研究它们的性质.这在第一章中已较详细地叙述和论证.我们就不一一介绍了.

对一般完备距离空间(X, d)上的 Fractal 空间$(\mathscr{H}(X), h)$或$(\mathscr{L}\mathscr{H}(X), h)$,其维数也可作类似的讨论.读者可以看到,分形几何的研究不仅限于 $\mathbf{R}^n$ 上,根据具体问题的要求,可以在所需要的空间中进行讨论,这也是科学研究发展的要求.

参考文献

[1]B.B.Mandelbrot,The Fractal Geometry of Nature,W.H.Freemanand Company,1982

[2]M.H.Taibleson,Fourier Analysis on Local Fields,Princeton University Press,1975

[3]Su Weiyi,The Derivatives and Integrals on Local Fields,J.of Nanjing Univ.,Math.Biquarterly,1985(2):32—40

[4]Su Weiyi,Pseudo - Differential Operators in Besov Spaces Over Local Fields,Approx.Theory & Appl.,1988,4(2):119—129

[5]Su Weiyi,Pseudo - Differential Operators and Derivatives on Locally Compact Vilenkin Groups,Reports of the Institute of Math.,Nanjing Univ.,1990(1):1—15

[6]Su Weiyi,Fractal and Harmonic Analysis over Locally Compact Groups,Proc.of Non - Linear Problems in Science and Techniques,Jiangsu,Nanjing,1991:17—20

[7]Su Weiyi, Gibbs - Butzer Derivatives and Its Applications, Nanjing Univ. ,1991

[8]Zheng Weixing, Derivatives and Approximation Theorems on Local Fields, Rocky Mountain J. of Math. ,1985,15(4):803—817

[9]Zheng Weixing, On p - Adic Cantor Functions, Nanjing Univ. ,1992

[10]Zheng Weixing & Su Weiyi, The Logical Derivatives and Integrals, J. Math. Res Exposition, 1981(1):79—90

[11]杨海浪、顾其钧,分形集逼近的"重点"排除算法,南京大学学报数学半年刊,1994,13(2):10—18

[12]J. E. Gibbs, Walsh Spectrometry, A Form of Spectral Analysis Well Suited to Binary Digital Computation, Nat. Phys. ,Lab. ,Teddington, Middx, Uk. ,1967:24

[13]Ren Fuxian, Su Weiyi & Zheng Weixing, The Generalized Logical Deriratives and Its Applications, J. of Nanjing Univ , 1978(3):1—8

[14]杨海浪,分形集的逼近算法,高等学校计算数学学报,1994(16):69—76

[15]P. L. Butzerand, I. Nesse, Fourier Analysis and Approximation, I. Birkhauser Basel and Academic Press, New York, 1971

[16]J. E. Gibbs and R. S. Stankovic, Why IWGD - 89? Porc of the First International Workshop on Gibbs Derivatives, Kupari Dubrovnik, 1989:26—28

[17]P. L. Butzer and R. S. Stankovic, Theory and Applications of Gibbs Derivatives, Proc, of the First International Workshop on Gibbs Derivatives, Kupari Dubrovnik, Yugoslavia Preface, 1998:26—28

[18]K. J. Falconer, The Gromerty of Fractal Set, Camb. Univ. Press, 1985

[19]Shui Penglang, The Structure of a Fractal over Local Fields, Nanjing Univ. ,1993

[20]Zheng Weixing, Su Weiyi & Jiang Huikun, A Note to the Concept of Derivatives on Local Fields, Apporx. Theory & Appl. ,1990(6):348—58

第五章
分形物理学简介

80 年代以来,分形物理学获得了巨大进展.就其内容看,大致可归纳为两个方面:一是研究在分形上(尤其是分形晶格上)呈现的各种物理现象和物理性质,这方面大致类似在固体物理中对具有平移对称的晶格所研究的问题;二是研究分形结构形成的物理机制,即探讨分形形成的物理起源.

关于分形上的物理现象和性质主要涉及下列几个方面:

(1) 分形晶格上的磁相变和临界动力学,即临界点附近的非平衡统计问题.

(2) 反常动力学(晶格振动、无规行走、自旋波等).

(3) 紧束缚型哈密顿量的量子力学.

(4) 各种系统(包括动力系统)的多重分形研究.

(5) 广延耗散系统的自组织临界性等.

关于分形结构形成的物理机制,主要涉及以下几个方面:

(1) 各种计算机模型,其基本模型是扩散置限聚集模型(DLA)和介质电击模型(DBM),它们属拉普拉斯生长模型.

(2) 解释分形生长的理论,如不动点变换理论、分支生长理论、生长界面动力学(KPZ 理论)、2 维拉普拉斯生长映射的哈密顿动力学等.

就目前发展看,仍然缺乏满意的理论来理解分形结构的形成.

本章只介绍分形晶格上的相变理论及临界动力学.

5.1 分形晶格上自旋系统的相变

本节将介绍有限分叉和无限分叉分形晶格上伊辛(Ising)自旋系统的铁磁一顺磁相变,主要采用重整化群方法.同时也介绍在一类特殊晶格上的严格求解方法.首先简单介绍相变与临界现象的基本知识.

5.1.1 相变与临界现象的基本知识[1,2]

为了方便起见,我们使用磁相变的语言.磁相变作为磁场和温度的函数可以用图5.1.1来描述.图中有一条1级相变线,在此线上磁化强度遭受到突然反向,这条线终止于临界温度 T_c.在 T_c 附近,系统发生由顺磁态($T > T_c$)到铁磁态($T < T_c$)的连续相变,它称为2级相变.此时磁化强度连续变化,且不存在潜热.为了描述相变与临界现象,常引入若干临界指数.

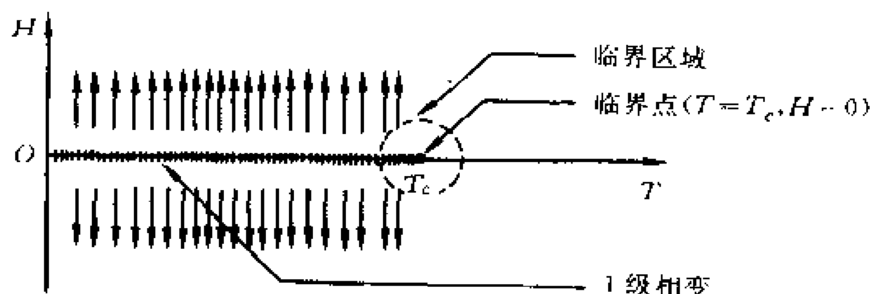


图5.1.1 Ising模型的磁相变图

1. 临界指数和奇异行为

(1) 磁化强度.设 F 代表系统的自由能,则在 T_c 附近,磁化强度的行为可表示为下列幂律形式:

$$M = \left(\frac{\partial F}{\partial H}\right)_T \Leftrightarrow (T_c - T)^\beta, \tag{5.1.1}$$

其中 β 代表它的临界指数.如果磁化强度通过磁场来表示,则在 $T = T_c$ 时,它可表示为如下形式:

$$M \Leftrightarrow H^{\frac{1}{\delta}}, \qquad T = T_c, \tag{5.1.2}$$

其中 δ 为临界指数.

(2) 比热. 比热按热力学公式可写为:

$$c = -T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \Leftrightarrow |T - T_c|^{-\alpha} + B, \tag{5.1.3}$$

这里,当比热的临界指数 $\alpha < 0$,比热曲线呈尖点变化;而当 $\alpha = 0$,奇异性是对数型的.

(3) 磁化率. 它可表示为:

$$\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_{H=0} \Leftrightarrow |T - T_c|^{-\gamma}. \tag{5.1.4}$$

其中 γ 为临界指数.

(4) 关联函数. 原点与距其 x 处的另一自旋相互关联可通过关联函数 $\Gamma(x)$ 来表示,它由下列 2 级矩定义(当 $T = T_c$):

$$\Gamma(x) = \langle s(x)s(0)\rangle \Leftrightarrow |x|^{-(d-2+\eta)}, \quad \xi \gg |x| \gg a \tag{5.1.5}$$

这里 $\langle \cdots \rangle$ 代表对确定统计分布函数的统计平均,d 为空间维数,η 为临界指数.

(5) 关联长度. 当系统处于临界区域,关联函数可表示为:

$$\Gamma(x) \Leftrightarrow e^{\frac{-|x|}{\xi}}, \qquad |x| \to \infty, \tag{5.1.6}$$

$$\xi \Leftrightarrow |T - T_c|^{-\nu},$$

其中 ξ 为关联长度,ν 为临界指数.

以上介绍了 6 个临界指数,其中 $\beta,\delta,\gamma,\alpha$ 与热力学量有关,而 η,ν 则与关联函数有关. 这 6 个指数也不全是独立的,它们遵守标度律. 这是由于在临界域,热力学量可表示为广义齐次函数.

2. 标度与普适性

上述各量的幂律行为遵守标度律,比如,方程(5.1.1)在 $(T_c - T) \to \lambda(T_c - T)$ 和 $M \to \lambda^{\beta} M$ 重标下是不变的. 再者,关联长度在 $T = T_c$ 时变为无穷大,而在临界域(T_c 附近)小尺度涨落和晶格长度变得不重要. 这些便导致标度不变和普适性思想.

(1) 标度律. 标度假说导致临界指数之间存在下列关系:

$$\alpha = 2 - \gamma d,$$

$$\beta = \frac{r}{\delta - 1}, \tag{5.1.7}$$

$$\gamma = \nu(2 - \eta),$$
$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2.$$

因而 6 个临界指数中只有 2 个是独立的.

(2) 普适性. 人们已发现,许多不同的物理系统具有相同的临界行为,这叫做普适性. 物理系统可分为若干普适类,划分普适类的依据是:空间维数 d 与序参量的分量个数 n. 有时还要考虑系统的对称性,例如,液体与 Ising 铁磁模型 $d = 3, n = 1$,超导、超流及 $x - y$ 模型 $d = 3, n = 2$,因而各分属相同普适类.

5.1.2　重整化群理论及方法[3,4]

在分形上的相变研究中,重整化群方法是一个基本方法,这是由于分形几何上具有标度不变性,因而非常有利于使用这一方法. 本节先介绍重整化群基本思想,再给出重整化群的形式定义,最后介绍两种常用的重整化群方法(方案).

1.　基本思想

临界点的关联长度 ξ 为无穷大,而在临界点附近 ξ 很大,ξ 与温度 T 的关系可从图 5.1.2 看出. 因此临界现象是包含大量自由度的大尺度范围的现象. 重整化群的基本想法是一步一步地减少自由度而又不损害整个物理系统的物理性质.

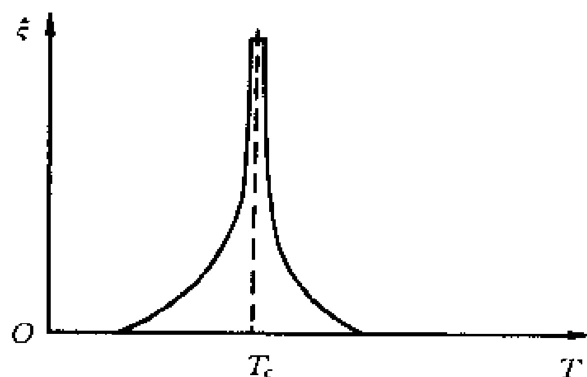
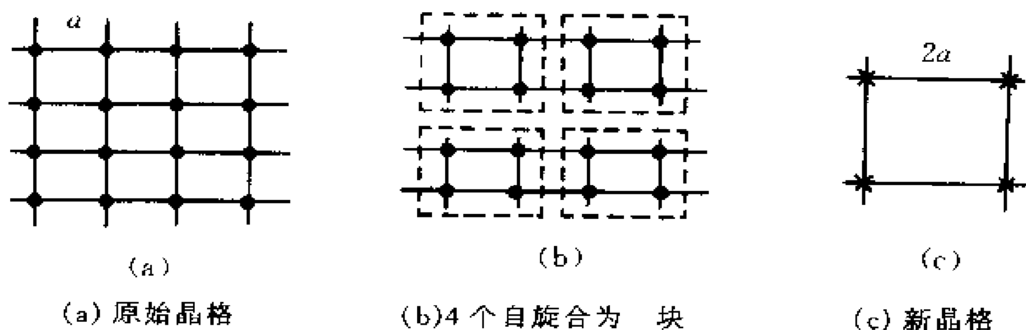


图5.1.2　关联长度与温度的关系

显然,提出这一概念的关键点是在临界点附近关联长度 ξ 很大,要想直接计算必然包含所有关联长度内的自旋(此处仍以磁性系统为例),计算必然很困难甚至行不通,因此减少自由度就变得很有必要.

为具体起见,图5.1.3给出一个Ising自旋系统的Site-Block变换,来显示如何减少自由度,即实施"粗粒化".经图5.1.3所示的变换,原来Site(原始晶格)间的间距为 a,后来Block(新晶格)自旋间的间距为 $2a$.如果 ξ 以晶格间距为单位,那么关联长度便变为原来的一半.如果重复此过程,则大的关联长度将约化为1的数量级.



(a) 原始晶格　　(b)4个自旋合为一块　　(c) 新晶格

图5.1.3　Ising 自旋系统的 Site - Block 变换

设自旋间原来的耦合常数为 K,变换后为 K',则:

$$K' = R(K), \qquad K = \frac{J}{k_B T}, \tag{5.1.8}$$

其中 J 为交换积分,k_B 为玻尔兹曼常数.约减的关联长度为:

$$\xi(R(K)) = \frac{1}{2}\xi(K). \tag{5.1.9}$$

为使 ξ 在 $K_c = J / k_B T_c$ 发散,应有:

$$K'_c = R(K_c) = K_c.$$

将其在 K_c 线性化:

$$R(K) = R(K_c) + \lambda(K - K_c),$$

$$\lambda = \left(\frac{\partial R(K)}{\partial K}\right)_{K_c},$$

则:

$$R(K) - K_c = \lambda(K - K_c).$$

设当 $K \to K_c$ 时,ξ 以幂律形式发散:

$$\xi(K) \Leftrightarrow (K - K_c)^{-\nu}, \tag{5.1.10}$$

则:

$$\frac{\xi(R(K))}{\xi(K)} = \left(\frac{R(K) - K_c}{K - K_c}\right)^{-\nu}.$$

因而，

$$\frac{1}{2} = \lambda^{-\nu},$$

或

$$\nu = \frac{\ln 2}{\ln \lambda},$$

可见，若已知 λ 便可求出关联长度临界指数 ν. 实际上，$\xi(K)$ 与(5.1.9) 式和(5.1.10) 式自洽的最一般形式是：

$$\xi(K) = (K - K_c)^{-\nu} f(\ln(K - K_c)), \tag{5.1.11}$$

这里 $f(x)$ 是以 $\ln\lambda$ 为周期的 x 的函数，周期性是基于下列事实：将 $K - K_c$ 改变一个因子 λ，等效于 $\ln(K - K_c)$ 平移一个量 $\ln\lambda$，然而周期函数不影响主要的幂律行为.

上述标度图像不仅提供了一种系统地约减自由度的途径，而且提供了关于解析函数 $R(K)$ 可能在 $R(K_c) = K_c$ 点产生 $\xi(K)$ 的非解析行为的一种解释.

在重整化群理论中将回答如何来找到 $R(K)$.

2.　重整化群的形式定义

设系统定义于晶格上，晶格常数为 a，哈密顿量为 $H(\sigma)$. 在标度变换 $a \to b\,a$ 下(此处 b 为重标因子)，一个变换 $T(\mu,\sigma)$ 将变数 σ 变为新变数 μ：

$$\exp H'(\mu) = \mathrm{Tr}\{\exp[T(\mu,\sigma) + H(\sigma)]\}. \tag{5.1.12}$$

若令：

$$\mathop{\mathrm{Tr}}_{\mu} \exp T(\mu,\sigma) = 1,$$

则可使配分函数保持不变：

$$Z[H'] = Z[H].$$

形式上可写出：

$$H' = R_b[H],$$

它称作重整化变换. 如果 H 用耦合常数 K 来表示，则：

$$K' = R_b(K). \tag{5.1.13}$$

它定义一组递推关系.

简单地说,重整化群变换是保持配分函数不变的变换,因为一个系统的热力学性质是由配分函数所控制,所以它在物理上是不变的.原则上,要解决相变问题必须求配分函数,通常这是一个极端困难的任务,仅仅在很少情况可以精确地求出.然而重整化群理论却是绕过这一困难,不"正面"去求配分函数,而只去研究保持配分函数不变的变换群,这样的思想既新颖又有效,它为相变问题的解决提供了有力的武器.

下面来考察变换的"群"性质.

定义 5.1.1 重整化群变换的合成规则可定义为:若进行两个 b_1, b_2 变换,则连续进行的重整化群变换为:

$$\begin{aligned} K' &= R_{b_2}[R_{b_1}(K)] \\ &= R_b(K). \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

它定义了一个具有标度变换为

$$b = b_1 b_2$$

的新重整化群变换.所以:

$$R_{b^n} = (R_b)^n,$$

$$Z(K) = Z(R_b(K)).$$

重整化群变换的集合形成一个半群(不含逆元),即通常称的重整化群.

一般地,重整化群计算包括下列步骤:

(1) 将自旋聚集成元胞.

(2) 定义重整化群变换.

(3) 导出递推关系.

(4) 确定变换的不动点.

(5) 研究临界行为.

递推关系一般是非线性的.所幸的是,在临界现象中,临界性质是由不动点处的行为决定.不动点为:

$$K' = R(K) = K = K^*.$$

在 K^* 附近对 $R(K)$ 进行线性化可求出临界指数:

$$K'_\alpha - K^*_\alpha = \sum_\beta R_{\alpha\beta}(K_\beta - K^*_\beta),$$

这里,

$$R_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial K'_\alpha}{\partial K_\beta}\right)_{K^*}.$$

在此我们已经考虑了多维耦合参数空间 $K_\alpha(\alpha = 1,2,\cdots)$，因而重整化群变换也由一组方程构成，不动点指的是 $K^* = (K_1^*, K_2^*, \cdots)$. 令 λ 为 $R_{\alpha\beta}$ 的本征值，$\varphi_\alpha^{(i)}$ 和 $\psi_\alpha^{(i)}$ 为左本征矢与右本征矢：

$$\sum_\alpha \varphi_\alpha^{(i)} R_{\alpha\beta} = \lambda_i \varphi_\beta^{(i)}, \tag{5.1.15}$$

$$\sum_\beta R_{\alpha\beta} \psi_\beta^{(i)} = \lambda_i \psi_\beta^{(i)},$$

定义 5.1.2　“简正坐标”定义为：

$$u_i = \sum_\alpha \varphi_\alpha^{(i)} (K_\alpha - K_\alpha^*), \tag{5.1.16}$$

使本征值方程退耦：

$$\begin{aligned} u'_i &= \sum_\alpha \varphi_\alpha^{(i)} (K'_\alpha - K_\alpha^*) \\ &= \lambda_i \sum_\beta \varphi_\beta^{(i)} (K_\beta - K_\beta^*) \\ &= \lambda_i u_i, \end{aligned}$$

这些 u_i 称为 Wigner 标度场. 存在下列三种情况：

(i) $\lambda_i > 1$，u_i 称为 Relevant；

(ii) $\lambda_i = 1$，u_i 称为 Marginal；

(iii) $\lambda_i < 1$，u_i 称为 Irelevant.

3、　临界指数

可将本征值 λ_i 与临界指数联系起来. 为简单起见，我们假定 $u_2 = u_3 = \cdots = 0$. 在重整化群变换下，系统的自由能密度的奇异部分应作如下变化：

$$f_s(u_1) = l^{-d} f_s(\lambda_1 u_1), \tag{5.1.17}$$

这里，

$$l^d = \frac{N}{N'},$$

l^d 是每个元胞中含格点的数目，d 是系统的维数. 如前所述，f_s 具有幂律型的奇异性，即可写为：

$$f_s(u_1) = A u_1^{\alpha_1},$$

因而有：

$$Au_1^{a_1} = l^{-d}A(\lambda_1 u_1)^{a_1}$$

和

$$a_1 = d\,\frac{\ln l}{\ln \lambda_1}.$$

如果写成：

$$\lambda_1 = l^{y_1},$$

则标度指数 y_1 便由下式给出：

$$y_1 = \frac{d}{a_1}.$$

现在若将 u_1 看作 $t = (T - T_c)/T_c$，它是耦合到温度上的标度场，则由

$$f_s(t) \Leftrightarrow |t|^{2-\alpha},$$

立即得到：

$$\frac{d}{a_1} = 2 - \alpha, \quad 或\ \alpha = 2 - \frac{d}{a_1}, \tag{5.1.18}$$

这里 α 便是前面提到的临界指数.类似地，也可得其他临界指数的表示式.

4. 重整化群方法一(Decimation 方法)

本节和下节介绍在分形研究中用得较多的两种重整化群方法.首先介绍 Decimation 方法，以 1 维 Ising 模型为例.

假设存在一个 Ising 自旋链，自旋放置于格点 $x_n = na$ 上，a 为晶格常数，$n = 0,1,2,\cdots$.自旋间仅含最近邻相互作用，其哈密顿量为：

$$-\beta\mathcal{H} = K\sum_n \sigma_{na}\sigma_{(n+1)a}. \tag{5.1.19}$$

现在实施 Decimation 步骤，即对自旋链上每隔一个自旋进行求和，使新链由没有进行求和的自旋 μ 组成，它们的晶格间距为 $2a$. $x_m = 2ma$，如图5.1.4 所示.



(a) (b)

图5.1.4 原始晶格和新晶格

形式上可将重整化群变换写成：

$$e^{T(\mu,\sigma)} = \prod_m \delta_{\mu(x_m),\sigma(x_m)} \tag{5.1.20}$$

新哈密顿量与原哈密顿量具有相同精确的形式，即只存在最近邻相互作用，但具有新的耦合数 K'：

$$\exp K'(\mu,\mu') = \mathop{\mathrm{Tr}}_{\sigma_1}\cdots\mathop{\mathrm{Tr}}_{\sigma_n}\exp[K(\mu,\sigma_1)]\exp[K(\sigma_1,\sigma_2)]\cdots\exp[K(\sigma_n,\mu')]. \tag{5.1.21}$$

为明显地计算新耦合常数，可利用下列两个公式：

(1) $\exp(K\sigma_1\sigma_2) = \mathrm{ch}K(1+(\mathrm{th}K)\sigma_1\sigma_2)$.

(2) $\sum_{\sigma=\pm1}(1+K\mu_1\sigma)(1+K\mu_2\sigma) = 2(1+K^2\mu_1\mu_2)$.

由此可以计算出：

$$\begin{aligned}\mathop{\mathrm{Tr}}_{\sigma}\ \exp K(\mu_1,\sigma)\exp K(\sigma,\mu_2) &= \sum_{\sigma=\pm1}\exp[K(\mu_1+\mu_2)\sigma]\\ &= \sum_{\sigma=\pm1}\mathrm{ch}^2K[1+(\mathrm{th}K)\mu_1\sigma][1+(\mathrm{th}K)\mu_2\sigma]\\ &= 2\mathrm{ch}^2K[1+(\mathrm{th}K)^2\mu_1\mu_2].\end{aligned}$$

令上式等于：

$$A\ \exp K'(\mu_1,\mu_2) = A\mathrm{ch}K'[1+(\mathrm{th}K')\mu_1\mu_2],$$

可见，

$$\mathrm{th}K' = \mathrm{th}^2K,\qquad K' = \mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}^2K), \tag{5.1.22}$$

这就是新耦合常数 K' 与旧耦合常数 K 之间的递推关系.(5.1.22) 式对应的重标因子 $b=2$. 更一般地，对任意重标因子 b 可得出：

$$K' = \mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}^bK).$$

对 2 维正方晶格，如果采用 Site - Block 方法来改变标度，那么将发现新哈密顿量中将产生新的耦合，即除了有最近邻相互耦合外，还有次近邻耦合和四体作用，这意味着对 2 维正方晶格不适于使用 Decimation 方法. 这一特点具有普遍意义，但前述 1 维链恰恰是个例外.

5.　*重整化群方法二(MK 键移方法)*

如果从一个确定的重整化群变换方程出发，对状态的求和一般难于进行，这里介绍一种下界近似方法. 它是一种变分方法，用来计算求和，使计算结果最优化. 这种方法叫 Migdal - Kadanoff 键移近似法.

设引入一项 $\Delta(\mu,\sigma)$ 到指数上，使求和可以进行计算. 近似的重整化哈密

顿量为：

$$H'_A(\mu) = \ln \operatorname*{Tr}_{\sigma} \exp[T(\mu,\sigma) + H(\sigma) + \Delta(\mu,\sigma)], \quad (5.1.23)$$

$\Delta(\mu,\sigma)$ 的最佳选取是使误差变得最小，条件是：

(1) $\operatorname*{Tr}_{\sigma} \exp[T(\mu,\sigma) + H(\sigma)]$ 是半正定权重和.

(2) $\Delta(\mu,\sigma)$ 为实数.

(3) $\operatorname*{Tr}_{\mu}\operatorname*{Tr}_{\sigma} \exp[T(\mu,\sigma) + H(\sigma)]\Delta(\mu,\sigma) = 0$.

在这些条件下，自由能满足下列不等式：

$$F[H'_A] \leqslant F[H'] = F[H]. \quad (5.1.24)$$

为了证实(5.1.24)式是正确的，首先定义：

$$F(\lambda) = -\ln \operatorname*{Tr}_{\mu}\operatorname*{Tr}_{\sigma} \exp[T(\mu,\sigma) + H(\sigma) + \lambda\Delta(\mu,\sigma)]. \quad (5.1.25)$$

显然，

$$F(0) = F(H),$$
$$F(1) = F(H'_A).$$

由(5.1.25)式立即得出：

$$\left(\frac{dF}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} = 0,$$

$$\left(\frac{d^2F}{d\lambda^2}\right)_{\lambda=0} = -(<\Delta^2>_\lambda - <\Delta>_\lambda^2)$$
$$= -<(\Delta - <\Delta>)^2>_\lambda < 0, \quad (5.1.26)$$

这里 $<\cdots>_\lambda$ 表示对权重 $\exp[T + H + \lambda\Delta]$ 的平均，由于权重是正的，2 阶导数为负，所以 $F(\lambda)$ 是一个递减函数，因而(5.1.24)式获得证明.

现在来考察什么样的 $\Delta(\mu,\sigma)$ 可以满足所要求的条件. 设 $a_i^\alpha(\mu,\sigma)$ 是局域自旋变数(如 $\sigma_i\sigma_{i+1}$)的集合，C_i^α 为与 μ,σ 无关的系数，则对 $\Delta(\mu,\sigma)$ 的一种简单选取为：

$$\Delta(\mu,\sigma) = \sum_{\alpha,i} C_i^\alpha a_i^\alpha(\mu,\sigma),$$

其中 C_i^α 规定满足下列条件：

$$\sum_i C_i^\alpha = 0.$$

立即发现，这样选取的 $\Delta(\mu,\sigma)$ 满足上面的条件. 事实上，条件(1) 和条件(2) 明显满足，而条件(3) 要求计算：

$$\underset{\mu}{\mathrm{Tr}}\underset{\sigma}{\mathrm{Tr}}(e^{T+H})\sum_{i,\alpha}C_i^{\alpha}a_i^{\alpha}(\mu,\sigma)=\sum_{i,\alpha}C_i^{\alpha}(\underset{\mu}{\mathrm{Tr}}\underset{\sigma}{\mathrm{Tr}}e^{T+H}a_i^{\alpha}(\mu,\sigma))$$

$$=\sum_{\alpha}\underset{\mu}{\mathrm{Tr}}\underset{\sigma}{\mathrm{Tr}}e^{T+H}a_i^{\alpha}(\mu,\sigma)\sum_i C_i^{\alpha}$$

$$=0,$$

其中已考虑到$\underset{\mu}{\mathrm{Tr}}\underset{\sigma}{\mathrm{Tr}}e^{T+H}a_i^{\alpha}(\mu,\sigma)$与 i 无关.

在实际问题中,$a_i^{\alpha}(\mu,\sigma)$取成哈密顿量中相互作用项的一部分,结果使引入 $\Delta(\mu,\sigma)$ 后形成在这里加上耦合,那里减去耦合.简单地说,我们可在变分约束下移动键.

例5.1.1　设考虑正方形晶格上的哈密顿量:

$$-\beta\mathscr{H}=K\sum_{i}\sigma_i\sigma_j,\tag{5.1.27}$$

$\Delta(\mu,\sigma)$ 为:

$$K\sigma_1\sigma_2-K\sigma_3\sigma_4=\Delta(\mu,\sigma),$$

这里 $K=c_1$, $-K=c_2$,且 $c_1+c_2=0$,因而满足前述要求.这样选取的 $\Delta(\mu,\sigma)$ 相当于在原有哈密顿量中连接 σ_1,σ_2 的键上耦合变为 $2K$,而原来连接 σ_3, σ_4 的键上耦合变为零.这一变化恰似将 $\sigma_3\sigma_4$ 上的键移至 $\sigma_1\sigma_2$ 键上,如图5.1.5所示.

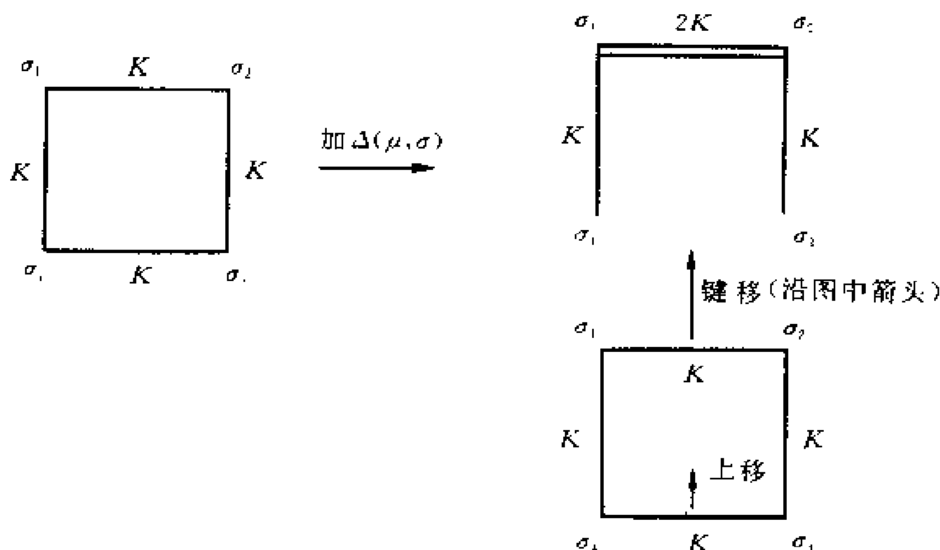


图5.1.5　键移示意图

现在考察在正方形晶格上的键移变换.应当强调,键移变换常常要跟 Decimation 联合起来进行.图5.1.6显示这一变换.

图5.1.6中各步骤产生的变化为：

(a) 初始晶格，键强度分别为 K_x，K_y，且 $K_x = K_y$.

(b) 水平地移动 y 键（设想晶格是无穷大）一个单位，y 键强度变为 $2K_y$.

(c) 对 x 键进行 Decimation，得：

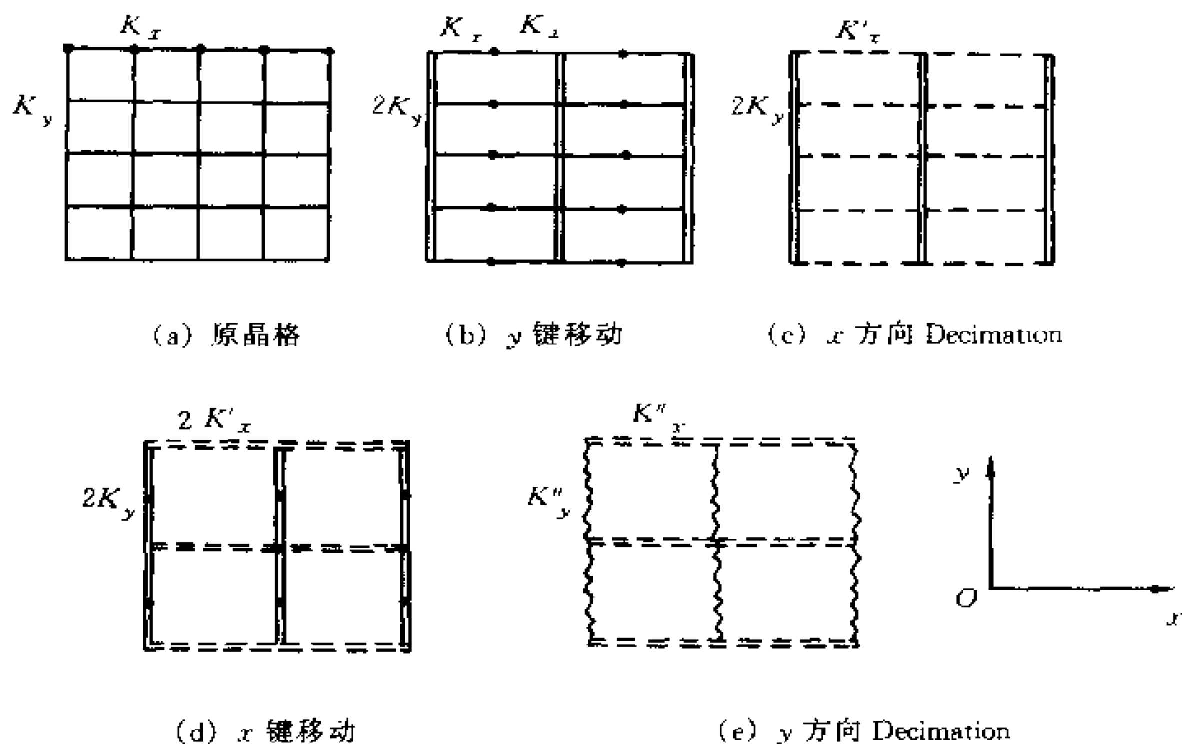
$$K_x' = \mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}^2 K_x),\qquad K_y' = 2K_y.$$

(d) 竖直地移动 x 键一个单位，则：

$$K_x'' = 2K_x'.$$

(e) 对 y 键进行 Decimation，得：

$$\begin{aligned} K_x'' &= 2K_x' = 2\mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}^2 K_x) \\ &= 2\mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}^2 K), \\ K_y'' &= \mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}^2 K_y) \\ &= \mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}^2 2K). \end{aligned}$$



(a) 原晶格　(b) y 键移动　(c) x 方向 Decimation

(d) x 键移动　(e) y 方向 Decimation

图5.1.6　键移变换示意图

注意到 $K''_x \neq K''_y$，而原来 $K_x = K_y = K$，可见变换产生了各向异性键．它是由于键移操作与 Decimation 操作互不对易引起的．

为了保持各向同性，可将耦合常数对称化：

$$K' = \frac{1}{2}(K'_x + K'_y).$$

如果推广上述变换到任意标度变化 $a \to ba$，则：

$$K'_x = b\,\mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}^b K), \qquad K'_y = \mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}^b bK),$$

其对称化值为：

$$K'_b = \frac{1}{2}(K'_x + K'_y) = \beta_b(K).$$

现考虑一无穷小变化：

$$b = 1 + \varepsilon,$$

精确到 ε 的无穷小量：

$$K_x^b = K + \beta(K)\varepsilon, \qquad K_y^b = K + \beta(K)\varepsilon,$$

这里，

$$\begin{aligned}\beta(K) &= \left(\frac{\mathrm{d}K_x^b}{\mathrm{d}b}\right)_{b=1} \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}K_y^b}{\mathrm{d}b}\right)_{b=1} \\ &= \mathrm{sh}K\ \mathrm{ch}K\ \ln(\mathrm{th}K).\end{aligned}$$

所以在无穷小变换下，系统保持各向同性.

5.1.3　Sierpinski Gasket 上 Ising 模型的相变[5,6]

考虑嵌置于 2 维欧氏空间的 Sierpinski Gasket，它的构造方法是：取 1 个边长为 1 的等边三角形，连接各边中点，使该等边三角形变为 4 个边长为 1/2 的三角形，再将中心三角形挖去，这便是构造的第一阶段（$n=1$）. 此后，对每个剩下的三角形作相同分隔. 如此重复，最终形成边长为 $(1/2)^n$ 的含有许多孔隙的结构，这便是 Sierpinski Gasket，它的构造过程如图5.1.7 所示.

Sierpinski Gasket 是一种分形，它的分形维数为 ln3/ln2. 现将 Ising 自旋放置于格点上. 原则上，在这种晶格上所有自旋系统都是精确可解的，因为它具有有限分叉度，它的分叉度是 $R_{\max}=4$，$R_{\min}=3$. 然而随着维数增加，计算变得非常复杂，许多相关作用必须包含进去，在作重整化群变换时，有许多自旋态应消约掉.

对具有有限分叉度的系统，在任何有限温度下均不存在相变，即只存在平庸的零温相变，这将在后边的计算中予以证实．实际上，按照标准不等式或熵论证，在任何有限温度下系统均分裂为许多畴块，增大自由能，使有序遭到破坏．

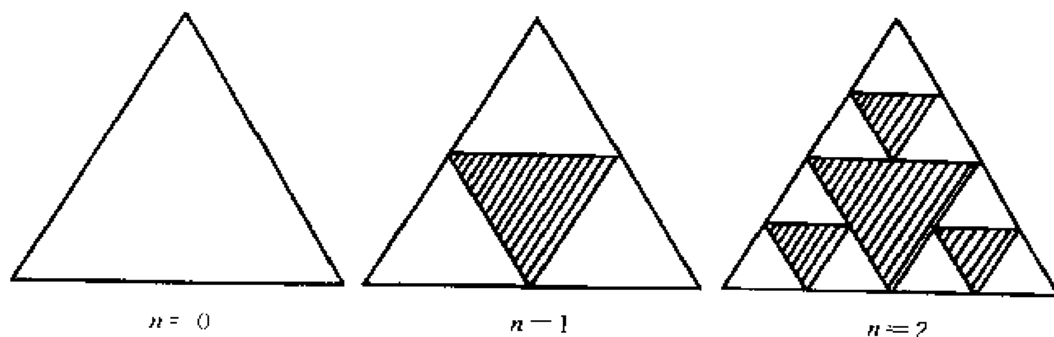


图5.1.7　Sierpinski Gasket 的构造过程

现写出系统的哈密顿量：

$$-\beta \mathcal{H} = K\sum_{n\ n}\sigma_i\sigma_j, \tag{5.1.28}$$

其中只含最近邻 $n.n$ 的作用，求和是对所有最近邻自旋对进行的，自旋 $\sigma=\pm 1$，K 为相互耦合常数．我们采用 Decimation 重整化群方法来研究相变，它的变换如图5.1.8 所示．

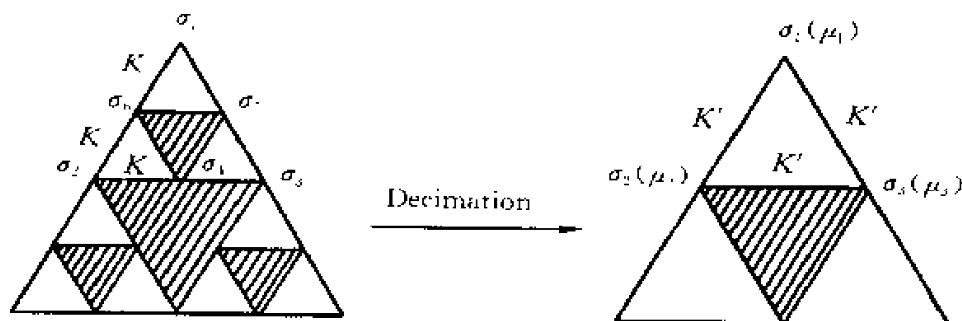


图5.1.8　重整化群变换示意图

通过消约掉（即进行求和），例如 $\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$，使线性尺度扩大 1 倍（即 $b=2$）．重整化群变换写成：

$$p(\mu,\sigma) = e^{T}(\mu,\sigma) = \prod_{\alpha}\delta_{\sigma_{\alpha}\mu_{\alpha}},$$

其中 σ_α 指前一级构造阶段格点上的自旋.故配分函数写为：

$$\sum_{\{\mu\}}\exp\left\{K'\sum_{\alpha,\beta}\mu_\alpha\mu_\beta\right\}$$

$$=\sum_{\{\mu\}}\sum_{\{\sigma\}}\left(\prod_{\sigma}\delta_{\sigma_\alpha\mu_\alpha}\right)\exp\left\{K\sum_{i,j}\sigma_i\sigma_j\right\}.$$

立即可写出（对照图5.1.8）：

$$Ae^{K'(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_3\mu_1)}$$

$$=\sum_{\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6}e^{K(\mu_1\sigma_6+\sigma_6\mu_2+\mu_2\sigma_4+\sigma_4\mu_3+\mu_3\sigma_5+\sigma_5\mu_1+\sigma_4\sigma_5+\sigma_5\sigma_6+\sigma_6\sigma_4)}.$$

经过求和运算，可求得重整化的相互耦合常数 K' 与原来 K 的关系：

$$e^{4K'}=\frac{e^{8K}-e^{4K}+4}{e^{4K}+3},\tag{5.1.29}$$

这便是递推关系.

有了此递推关系，可令 $K'=K$，从而利用它求出重整化群变换的不动点 $K^*=0,\infty$，其中 $K^*=\infty$ 对应温度为零的不动点，它是不稳定的，因而为相变临界点；而 $K^*=0$ 对应温度为 ∞ 的高温无序区，是顺磁不动点.

接着利用(5.1.29)式在临界点 $K^*=K_c=\infty$ 处进行线性化，从而求出关联长度临界指数 ν. 为此，在 $T_c=0$ 附近选取低温小变量 $t=e^{-4K}$，将(5.1.29)式改写为：

$$t'=t+4t^2+o(t^3)=R(t).$$

将其在不动点 $t^*=0$ 附近展开，仅取其线性项，则有：

$$t'=t^*+\frac{\partial R(t)}{\partial t}\Big|_{t^*}\cdot(t-t^*)$$

$$=t^*+\lambda(t-t^*)=\lambda t=t.$$

可见变换的本征值 $\lambda=1$. 利用 $\nu=\ln b/\ln\lambda$，求得 $\nu=\infty$. 其他临界指数可从自由能密度的下列关系式出发：

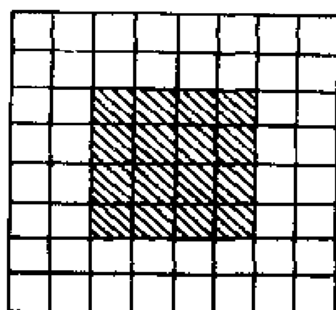
$$F(h,t)=b^{-d_f}F(b^{y}h,b^{x}t),$$

再利用热力学公式和标度求得. 上式中 h,t 分别代表约化磁场和温度.

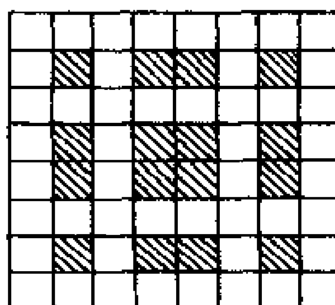
5.1.4 Sierpinski Carpets 上 Ising 模型的相变[7,8]

1. Sierpinski Carpets 的构造

Sierpinski Carpets 是用下列迭代方式构造而成的：先取一正方形，将其各边分成 b 等分，划分成 b^2 个小正方形，然后按某种规则挖去其中某 l^2 个小正方形，这样就形成构造的第一阶段($n=1$)；然后对每个剩下的小正方形实施与 $n=1$ 阶段相同的分割和挖去步骤，得 $n=2$ 构造阶段. 以后如此重复下去，便构造出 Sierpinski Carpets. 图5.1.9 和图5.1.10 分别给出两个构造实例. 阴影部分被挖去，剩下的小方块按相同方法分割和挖取. (a) 和(b) 为两种不同构造法，因而得出两种不同的 Carpets.

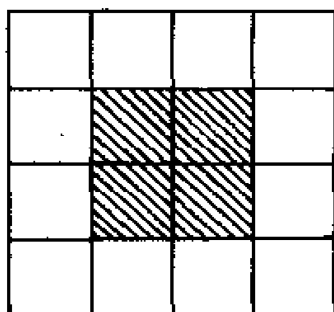


(a)$n=1$，中心挖法

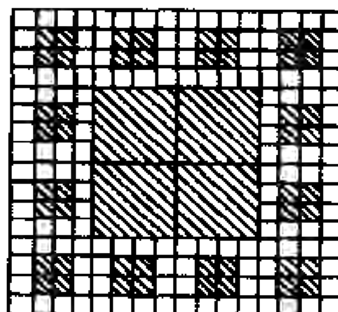


(b)$n=1$，分散挖法

图5.1.9 $b=8$，$l=4$ 时 Sierpinski Carpets 的两个构造阶段



(a)$n=1$



(b)$n=2$

图5.1.10 $b=4$，$l=2$ 时 Sierpinski Carpets 的两个构造阶段

现将 Ising 自旋系统放在上述晶格点上，系统的哈密顿量为：

$$-\beta\mathscr{H} = K\sum_{n\ n}\sigma_i\sigma_j + K_w\sum_{n\ n}\sigma_i'\sigma_j', \tag{5.1.30}$$

其中，

$$K = \frac{J}{kT}, \qquad K_w = \frac{J_w}{kT}$$

分别代表两类不同键的相互作用常数. K 键两边面积均保留，K_w 键的一边是空的(被挖去). 引入这两类键的目的在于使重整化群变换的结果能保持参数空间(K, K_w)不变，使计算能够进行下去. 这里 $n.n$ 表示最近邻.

为了演示键移重整化群变换的具体过程，我们考察图5.1.11 的构造. 图中是 $b = 3, l = 1$ 时用中心挖法得到 Sierpinski Carpets 的构造.

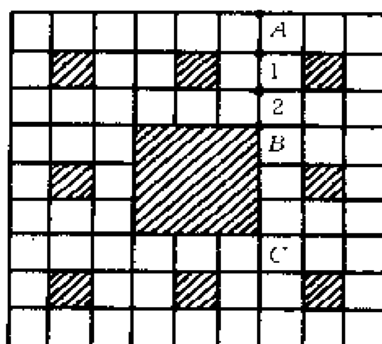


图5.1.11　$b = 3, l = 1$ 时 Sierpinski Carpets 的构造

如以前所述，键移往往与 Decimation 联合进行. 两类键 K, K_w 经重整化后变为 K', K'_w，它们的变换示意图如图5.1.12 所示.

图5.1.12 中键上的小箭头代表移动方向，为了避免产生各向异性的重整化键，从 x, y 方向同时进行键移. 由该图可见，键移后的 AB 键由 $3K, K + 2K_w$ 和 $3K$ 这三段串接而成. 消去 1,2 两点的自旋后(通过对其状态求和)便最终产生重整化键 K'，它与 K 和 K_w 的关系为：

$$\mathrm{th}K' = \mathrm{th}^2(3K)\mathrm{th}(K + 2K_w), \tag{5.1.31}$$

它是由下列计算得到的：

$$Ae^{K\sigma_A\sigma_B} = \sum_{\sigma_1,\sigma_2} e^{3K(\sigma_A\sigma_1+\sigma_2\sigma_B)+(K+2K_w)\sigma_1\sigma_2} \tag{5.1.32}$$

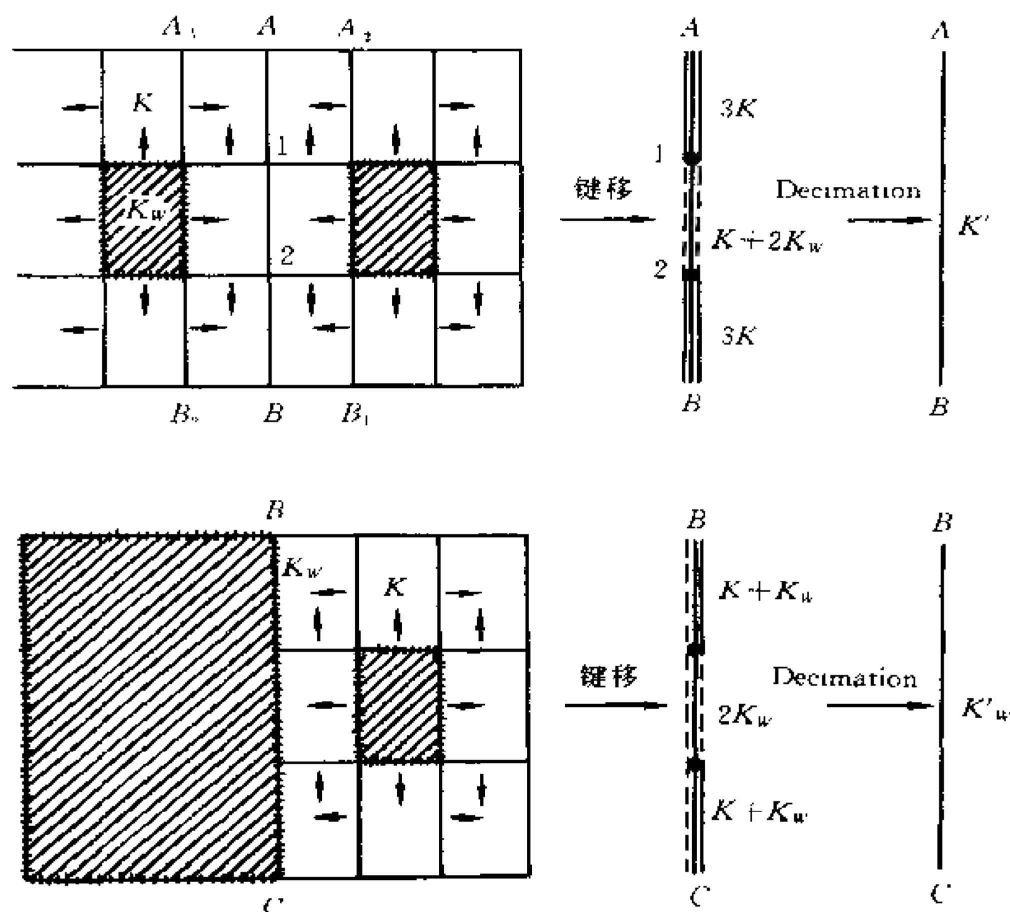


图5.1.12　两类键重整化变换示意图

类似地可求出 K'_w 为：

$$\mathrm{th}K'_w = \mathrm{th}^2(K + K_w)\mathrm{th}2K_w. \tag{5.1.33}$$

(5.1.31) 式和(5.1.32) 式便是重整化群递推关系，这些关系是晶格线性标度扩大 3 倍的结果. 顺便提到，(5.1.32) 式中的 A 或其他处出现的类似的常数只对系统的自由能产生影响.

推广到中心有 $l \times l$ 方块被挖掉的情况，可类似地产生下列递推关系：

$$\mathrm{th}K' = \mathrm{th}^l[(b - l - 1)K + 2K_w]\mathrm{th}^{b-l}bK, \tag{5.1.34}$$

$$\mathrm{th}K'_w = \mathrm{th}^l\left[\frac{1}{2}(b - l - 2)K + 2K_w\right]\mathrm{th}^{b-l}\left[\frac{1}{2}(b - 1)K + K_w\right].$$

这两个递推关系在 2 维参数空间(K, K_w)内是封闭的.

2.　不动点

为今后讨论方便起见,引入两个新变量:

$$\tau = \mathrm{th}K, \qquad \tau_w = \mathrm{th}K_w$$
$$\tau' = \mathrm{th}K', \qquad \tau'_w = \mathrm{th}K'_w.$$

由于 $l \times l$ 方块是在 $b \times b$ 方块的中心,故有 $b \geqslant l + 2$. 在 $b > l + 2$ 情况下,由(5.1.34)式解得三个平庸不动点:

$$(\tau^*, \tau_w^*) = (0,0), (0,1), (1,1),$$

它们分别对应参数空间(τ, τ_w)中的 A, B, C 点,而对 $b = l + 2$,存在一个附加的平庸不动点 D:

$$(\tau^*, \tau_w^*) = (1,0), \qquad b = l + 2.$$

以下以 $b = 7, l = 5$ 且中心挖去生成的 Sierpinski Carpets 为例,显示出用计算机求解(5.1.34)式得到的流图(图 5.1.13),并逐个分析所有不动点的含义.

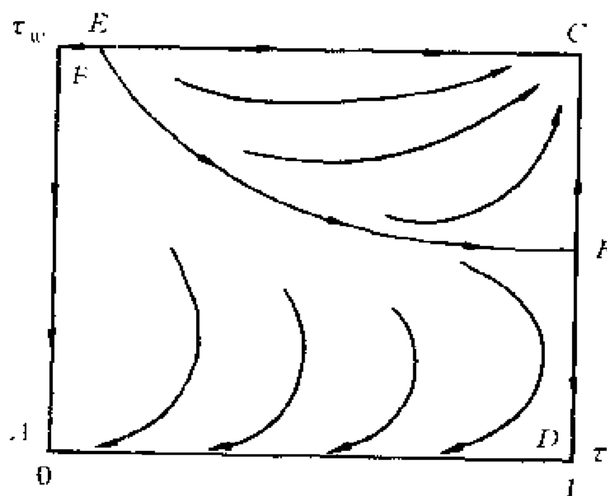


图5.1.13　在(τ, τ_w)空间的流图

(1) 不动点 A:对应 $K = K_w = 0$,相当于无穷大温度,系统处于高温顺磁相,完全无序,因而称为顺磁不动点.

(2) 不动点 B:对应 $K = 0, K_w = \infty$,它描写了一种各向异性系统. 在这种系统中,处于"壁"(它的一边面积被挖去)上格点自旋间具有无穷大强度的耦合.

(3) 不动点 C:$K = K_w = \infty$,相当于零温系统,系统处于完全有序的铁磁态,这是铁磁不动点.

(4) 不动点 D:对应 $K = \infty$,$K_w = 0$,相当于零温,但在“壁”上的格点自旋间完全没有相互作用,是个自由端.

3. 重整化群流

再研究在一些特殊轴上的重整化群流:

(1) 在 $\tau_w = 0$ 轴上,重整化群流沿此轴由 B 流向 A.同样在 $\tau_w = 1$ 轴上,由该轴出发的重整化群流也不偏离此轴.假如在不动点 B,C 附近展开递推方程组,研究它们的稳定性.可以发现,存在着沿 $\tau_w = 1$ 轴分别指向 B 和 C 的重整化群流,这表明在此轴上一定还有另一个不动点,它沿该轴是不稳定的.该不动点在图5.1.13 上用 E 标出.

(2) 在 $\tau = 1$ 轴上,重整化群流也保持在此轴上.若将递推方程组在不动点 C 和 D 附近展开,立即显示出沿此轴该两个不动点是稳定的,因而必定在此轴上还有一个不稳定的不动点,用 F 表示它.

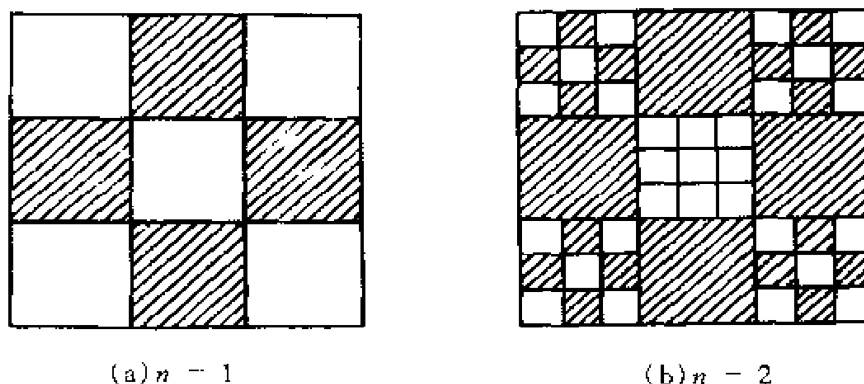
图5.1.13 中曲线 EF 代表临界线,它将无序相(流向 A)与有序相(流向 C)分开.临界点用 F 表示.

目前,进行的研究表明,临界指数与几何结构的多个参数,如分形维数、连接性、不均匀性等有关,但精确的依赖关系仍有待研究.

5.1.5 分形上 Ising 模型的严格配分函数和关联函数[9,10]

迄今在分形上研究相变时几乎都采用重整化群方法,只有极个别情况求出过严格的配分函数和关联函数.本节介绍在一类特殊分形上的精确可解模型.

考虑 1 个嵌置于 2 维空间的特殊分形结构,它的构造方法是:取一个正方形,每边分为 3 等分,作出 9 个小正方形,留下中央和 4 个角上的小正方形块,其余挖去,这是构造的第一阶段($n = 1$).以后将所有剩下的小正方形块仿照同样方式进行分割和取舍.如此重复,最终构成一个分形维数为 $d_f = \ln 5/\ln 6$ 的分形晶格.图5.1.14 是分形晶格的构造步骤.



(a)$n=1$　　(b)$n=2$

图5.1.14　分形晶格的构造步骤(阴影部分应挖去)

现考虑不含外场的 Ising 模型哈密顿量：

$$-\beta\mathscr{H}=K\sum_{n.n}\sigma_i\sigma_j. \tag{5.1.35}$$

上式求和只对最近邻进行. 系统的配分函数为：

$$Z=\sum_{\{\sigma\}}e^{-\beta\mathscr{H}}.$$

这里求和是对系统的所有自旋位形进行，$\{\sigma\}=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_N)$，由于 $\sigma_i=\pm 1$，因而可写为：

$$e^{K\sigma_i\sigma_j}=\operatorname{ch}K(1+\sigma_i\sigma_j\operatorname{th}K) \tag{5.1.36}$$

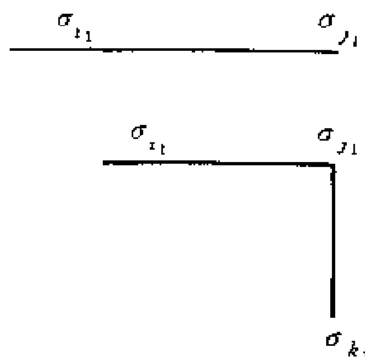
及

$$Z_n=\sum_{\{\sigma\}}e^{-\beta\mathscr{H}}=(\operatorname{ch}K)^M\sum_{\{\sigma\}}\prod_{n.n}(1+\sigma_i\sigma_j\operatorname{th}K), \tag{5.1.37}$$

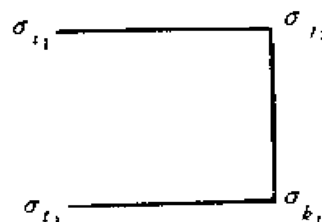
其中 n 代表分形的第 n 级构造阶段，M 为晶格棱的总数，$n.n$ 表示最近邻. 将连乘展开，便得到含 th$K$ 的各种幂次的项. 注意到 $\sigma^2=1$，因而必有：

$$\sum_{\{\sigma\}}(\sigma_{i_1}\sigma_{j_1})\operatorname{th}K=0,$$

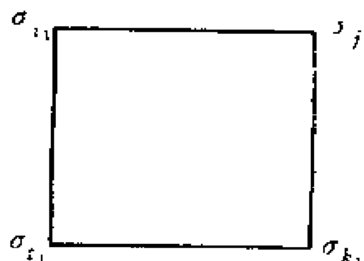
$$\sum_{\{\sigma\}}(\sigma_{i_1}\sigma_{j_1})(\sigma_{i_1}\sigma_{k_1})\operatorname{th}^2K=0.$$



$$\sum_{\{\sigma\}}(\sigma_{i_1}\sigma_{j_1})(\sigma_{i_1}\sigma_{k_1})(\sigma_{k_1}\sigma_{l_1})\text{th}^3K = 0.$$



$$\sum_{\{\sigma\}}(\sigma_{i_1}\sigma_{j_1})(\sigma_{i_1}\sigma_{k_1})(\sigma_{k_1}\sigma_{l_1})(\sigma_{i_1}\sigma_{j_1})\text{th}^4K$$
$$= 2^{N_n}\text{th}^4K.$$



这里 N_n 是分形晶格上的格点总数. 如果在上述表示中出现的每对近邻自旋间连 1 根键,每根键分配 1 个因子 th$K$,则上面的表示式便与 4 种键位形相对应. 这 4 种键位形的特点是:只有第四种键位形的每个格点有 2 根(偶数根)键通过,而且求和结果不为零;而其余 3 种键位形都存在只连 1 根键的格点,求和结果为零. 前一类图称为偶图,这类图对配分函数给出非零贡献.

由图5.1.14看出,所有偶图都只能是由 4 根键组成的正方形块组成,一个高阶偶图含有多个由键组成的正方形块,因而在(5.1.37)式中只能存在含 th^4K 的各种幂次的项,而且含$(\text{th}^4K)^n$ 的项显然共有 $m!/n!(m-n)!$个,这里 m 为分形晶格中所含正方形块总数,而 n 为形连键正方形块的数目. 根据这些考虑,即得:

$$\begin{aligned} Z_n &= (\text{ch}K)^M 2^{N_n}\left(1 + m\,\text{th}^4K + \frac{m!}{2!(m-2)!}\text{th}^8K + \cdots\right. \\ &\quad \left. + \frac{m!}{n!(m-n)!}\text{th}^{4n}K + \cdots + \text{th}^{4m}K\right) \\ &= (\text{ch}K)^M 2^{N_n}(1 + \text{th}^4K)^m. \end{aligned} \tag{5.1.38}$$

显然 $M = 4m$. (5.1.38) 式给出了严格的(精确的)配分函数.

利用已知的配分函数，可求出在热力学极限下严格的自由能密度 f 的表示式. 从图5.1.14 可推得：$N_n = 3\times 5^n + 1$，$m = 5^n$，$M = 4\times 5^n$，故有：

$$
\begin{aligned}
f &= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{KT}{N_n}\right)\ln Z_n \\
&= -kT\left[\frac{4}{3}\ln(\mathrm{ch}K) + \ln 2 + \frac{1}{3}\ln(1+\mathrm{th}^4K)\right]. \qquad (5.1.39)
\end{aligned}
$$

当 $K \neq \infty$ 时，$\mathrm{th}K < 1$，$\mathrm{ch}K =$ 有限值. 因而从自由能密度表示式看出，只有当 $K = \infty$（相应温度 $T = 0$）时才产生奇异性（非解析性），说明系统只存在零温相变.

其次，再来计算关联函数：任意两个自旋 σ_k 与 $\sigma_{k'}$ 的关联函数定义为：

$$
\langle \sigma_k \sigma_{k'} \rangle = \frac{1}{Z_n}\sum_{\{\sigma\}}(\sigma_k\sigma_{k'})e^{K\sum_{nn}\sigma_i\sigma_j}. \qquad (5.1.40)
$$

可将右边的求和展开：

$$
\begin{aligned}
\langle \sigma_k \sigma_{k'} \rangle &= \frac{1}{Z_n}\sum_{\{\sigma\}}(\sigma_k\sigma_{k'})\prod_{nn}e^{K\sigma_i\sigma_j} \\
&= \frac{1}{Z_n}(\mathrm{ch}K)^M\sum_{\{\sigma\}}(\sigma_k\sigma_{k'})\Big\{1 + \sum_{nn}\sigma_i\sigma_j\mathrm{th}K \\
&\quad + \sum_{nn}(\sigma_{i_1}\sigma_{j_1})(\sigma_{i_2}\sigma_{j_2})\mathrm{th}^2K + \cdots \\
&\quad + \sum_{nn}(\sigma_{i_1}\sigma_{j_1})\cdots(\sigma_{i_M}\sigma_{j_M})\mathrm{th}^MK\Big\}.
\end{aligned}
$$

经过分析，可严格地求出：

$$
\langle \sigma_k \sigma_{k'} \rangle = \left(\frac{2\mathrm{th}^2K}{1+\mathrm{th}^4K}\right)^L\left(\frac{\mathrm{th}K + \mathrm{th}^3K}{1+\mathrm{th}^4K}\right)^{L'}.
$$

这里 L 与 L' 是由分形几何及 σ_k 与 $\sigma_{k'}$ 之间的连接路径决定的量. 关联长度为：

$$
\xi \Leftrightarrow \left[\ln\frac{1+\mathrm{th}^4K}{2\mathrm{th}^2K}\right]^{-1},
$$

当 $K\to\infty$，即趋近临界点时 $\xi\to\infty$；而当 K 为任何有限值，ξ 都为有限，这也说明只有零温相变.

在其他某些特殊分形晶格中，也可用图形展开的方法，借助偶图来求出严格的配分函数和关联函数，读者可参考有关文献.

5.2　临界点附近的非平衡统计力学

5.2.1　临界动力学的基本概念[11]

上节介绍了静态(平衡态)临界行为,本章则介绍临界点附近的动态行为,即非平衡现象.

要建立起描述复杂非平衡现象的理论非常困难,只要将其与静态临界现象理论加以对比就可清楚地看到这一点.在平衡态理论中,原则上只需找出系统的动力学变量(如自旋)的位形及其他物理量的热平衡概率分布就够了,这已在熟知的平衡态统计物理中得到解决.然而,在动力学问题中,例如,系统的弛豫过程,还需要找到位形的时间演化,物理量在与时间有关的扰动作用下如何变化,以及当微扰撤去后系统如何趋向平衡.在临界动力学问题中,主要兴趣在于序参量或其他慢变量的大尺度涨落的时间演化.在临界点,系统存在无穷大的关联长度,因而涨落的长波模具有非常长的弛豫时间,这便产生"临界慢化"现象.

在动力学问题中,必须建立运动方程.完全从微观出发建立运动方程迄今仍未完成.然而,基于物理学中的一些基本原则(如守恒律等)唯象地建立的方程常被采用.现在采用的是 Master 方程,这一方程支配着非平衡统计分布的时间演化.

实际上,从 Master 方程出发解非平衡统计分布也是困难的.现在只有个别情况(1 维)获得了精确解.80 年代发展了实空间的与时间有关的重整化群(TDRG)方法,成为解决临界动力学问题的有力工具.

本章先介绍 TDRG 方法的基本概念和形式理论,再将其应用于 1 维平移对称系统,然后简要地介绍分形晶格上的应用.由于计算上的复杂性,详细的计算过程将略去.

5.2.2　TDRG 方法[13]

在介绍此方法前,先提一下临界动力学中的动力学标度假说,它可表示为:

$$\tau \Leftrightarrow \xi^{Z}, \tag{5.2.1}$$

其中ξ代表关联长度，τ代表弛豫时间，Z称为动力学临界指数.这一假说将弛豫时间与系统长度联系起来.

现在回到重整化群方法：在平衡态理论中，重整化群变换是应用到平衡态统计分布函数上，以使哈密顿量的对称性及配分函数保持不变.在临界动力学中，重整化群变换应用到非平衡统计分布函数上，但须使它所遵守的 Master 方程在形式上保持不变，因而时间标尺也需要进行变换.这样做的结果，使动力学标度的内涵与系统所有的与时间有关的性质通过统计分布函数联系起来.这种空间和时间尺度均进行的变换称为与时间有关的重整化群变换，即 TDRG 方法.这便是临界动力学中重整化群的基本思想.

上述思想借助 Ising 模型可表示成如下几种形式：

1.　非平衡统计分布函数 $p(\sigma,t)$ 的方程式

写出非平衡统计分布函数 $p(\sigma,t)\equiv p(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_N t)$ 所遵守的 Master 方程：

$$\tau_0\frac{\mathrm{d}p(\sigma,t)}{\mathrm{d}t}=-Lp(\sigma,t),\tag{5.2.2}$$

这里 Ising 自旋 $\sigma_i=\pm 1$，τ_0 为时间标尺，起着将系统与热源耦合的作用.右边 L 为刘维尔(Liouvile)算子，决定系统的动力学性质，它的形式原则上可在具体问题中明显地写出，但试图从第一原理出发，由哈密顿量作出的微观运动方程来确定它是非常困难的，现在都是唯象地来确定它，以它作为动力学问题的基础，以便提供一个合理的图像.

2.　Master 方程的重整化

将重整化群变换 $T(\mu,\sigma)$ 作用到 Master 方程上，注意在5.1节中曾采用的记号 $e^{T(\mu,\sigma)}$ 用 $T(\mu,\sigma)$ 代替，我们有：

$$\tau_0\sum_{\{\sigma\}}T(\mu,\sigma)\frac{\mathrm{d}p(\sigma,t)}{\mathrm{d}t}=-\sum_{\{\sigma\}}T(\mu,\sigma)L(\sigma)p(\sigma,t),\tag{5.2.3}$$

由于 $T(\mu,\sigma)$ 与 t 无关，因而可与时间导数交换，故方程左边变为：

$$\tau_0\sum_{\{\sigma\}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(\mu,\sigma)p(\sigma,t)=\tau_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p'(\mu,t).$$

右边则可变为下列形式：

$$\sum_{\{\sigma\}}T(\mu,\sigma)L(\sigma)p(\sigma,t)=-b^{-Z}L'(\mu)p'(\mu,t).$$

最终 Master 方程变为：

$$(\tau_0 b^Z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p'(\mu,t) = L'(\mu)p'(\mu,t),$$

或

$$\tau_0'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p'(\mu,t) = -L'(\mu)p'(\mu,t). \tag{5.2.4}$$

重整化后的 Master 方程(5.2.4) 与(5.2.2) 在形式上完全相同,只是:

$$p(\sigma,t)\rightarrow p'(\mu,t),$$
$$L(\sigma)\rightarrow L'(\mu),$$
$$\tau_0\rightarrow\tau_0',$$
$$x\rightarrow bx.$$

这里 τ_0' 定义为:

$$\tau_0' = \tau_0 b^Z,$$

其中 b 为空间长度重标因子,Z 便是动力学临界指数.

3. $p(\sigma,t)$ 的具体形式

问题是要对 $p(\sigma,t)$ 作变换,必须事先知道它的具体形式,显然这是不可能的.实际上,如果预先知道 $p(\sigma,t)$ 也就无需作变换了,因为系统的非平衡性质均可由这一统计分布函数决定.现将 $p(\sigma,t)$ 写为:

$$p(\sigma,t)\equiv p(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_N t) = p_e(\sigma)\varphi(t), \tag{5.2.4$'$}$$

其中 $p_e(\sigma) = 1/Ze^{-\beta\mathscr{H}}$ 为平衡态统计分布函数,$\varphi(t)$ 可写为:

$$\varphi(t) = 1+\sum_{i=1}^{m}O_i h_i(t) = 1+\vec{O}\cdot\vec{h}, \tag{5.2.5}$$

这里 O_i 为自旋算符,例如,它含 $\sigma_i,\sigma_i\sigma_j,\sigma_i\sigma_j\sigma_k,\cdots$ 这些类型的项;$\vec{O},\vec{h}$ 均具有分量 O_i,h_i.(5.2.5) 式是一般的表示式,为了具体计算,不得不将其切断,切断的原则是保持在重整化群变换下,它们能形成参数空间的不变子空间.

迄今流行两种切断方法,一种是令:

$$\varphi^M(t) = 1+\sum_q h_q\sum_i\sigma_i^q, \tag{5.2.6}$$

这里 h_q 与 σ_i^q 具有磁能形式,对 q 的求和是对晶格上具有多少种不同类型的配位数进行计算,对 i 求和则是对格点进行.这种切断方法称为磁型切断.

另一种切断方法为:

$$\varphi^E(t) = 1 + \sum_{<ij>} h(\sigma_i\sigma_j),$$

这种$(\sigma_i\sigma_j)$是一对最近邻自旋,它相当于Ising模型哈密顿量中的项,称作能量型切断.以后我们只研究(5.2.6)型切断.

4.　$L(\sigma)$的确定

我们还须知道$L(\sigma)$才可具体实施变换.确定$L(\sigma)$是建立在模型基础上,两种最常见的模型是:Glauber模型——假设系统中每次(单位时间)只有一个自旋发生翻转;Kawasaki模型——假设每次有两个自旋的取向发生交换.这两种模型可用来模拟不同的问题.我们在此只介绍Glauber模型,在这个模型中,Master方程右边表为:

$$\begin{aligned}
&\sum_j W_j(\sigma_1,\cdots,\sigma_j,\cdots,\sigma_N)p(\sigma_1,\cdots,\sigma_j,\cdots,\sigma_N t)\\
&+\sum_j W_j(\sigma_1,\cdots,-\sigma_j,\cdots,\sigma_N)p(\sigma_1,\cdots,-\sigma_j,\cdots,\sigma_N t)\\
&= -L(\sigma)p(\sigma,t)\\
&= -\sum_j(1-p_j)W_j(\sigma)p(\sigma,t),
\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

这里$W_j(\sigma_j)$代表处于σ_j的状态翻转为$-\sigma_j$的概率,$W_j(-\sigma_j)$代表由$-\sigma_j$跃迁为σ_j的概率,p_j是自旋翻转算符:

$$p_j f(\cdots\sigma_j\cdots t) = f(\cdots,-\sigma_j,\cdots,t).$$

然而跃迁概率仍待确定,原则上它也应由微观机制来确定,但这也是极其困难的.现在采用的办法是借助细致平衡条件来确定.它指的是在平衡情况下,系统中正元碰撞过程与逆元碰撞过程的作用相互抵消.因此要使(5.2.7)式中求和号内各相应项在$p(\sigma,t)$改为平衡统计分布函数$p_e(\sigma)$后应相等,即:

$$\begin{aligned}
&W_j(\sigma_j)p_e(\sigma_1,\cdots,\sigma_j,\cdots,\sigma_N)\\
&\quad= W_j(-\sigma_j)p_e(\sigma_1,\cdots,-\sigma_j,\cdots,\sigma_N),
\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

或

$$(1-p_j)W_j(\sigma_j)p_e(\sigma) = 0,$$

现将(5.2.8)式具体写为:

$$\frac{W_j(\sigma_j)}{W_j(-\sigma_j)} = \frac{e^{K\sigma_i\sum_i\sigma_i}}{e^{K\sigma_j\sum_j\sigma_i}}, \tag{5.2.9}$$

其中 $\sum_{i}$ 只对 j 的最近邻进行求和.(5.2.9)式显然确定了两种跃迁概率之比，但还不能唯一地确定 $W_j(\sigma_j)$，因而通常取：

$$W_j(\sigma_j) = \left[\frac{p_e(\sigma_1,\cdots,\quad\sigma_j,\cdots,\sigma_N)}{p_e(\sigma_1,\cdots,\sigma_j,\cdots,\sigma_N)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.2.10}$$

在 1 维情况下，上式具体化为：

$$W_j(\sigma_j) = \exp[-K\sigma_j(\sigma_{j-1}+\sigma_{j+1})]. \tag{5.2.11}$$

综上所述，现将 Master 方程改写为：

$$\tau_0\frac{\mathrm{d}p(\sigma,t)}{\mathrm{d}t} = -\mathscr{L}\varphi(\sigma,t)$$
$$-\sum_i\mathscr{L}_i\varphi(\sigma,t),$$

其中，

$$\sum_i\mathscr{L}_i = \mathscr{L},$$
$$\mathscr{L}_i = p_e W_i(1-p_i).$$

5.2.3　TDRG 应用于 1 维动力 Ising 模型[12]

临界动力学的一项基本任务就是，求动力学临界指数 Z. 本节考虑 1 维 Ising 自旋系统，它能清楚地显示实施 TDRG 方法的各种步骤及技巧，为研究其他较复杂的晶格(如分形晶格)打下良好的基础.

设自旋系统最初在微扰下处于非平衡态，当微扰撤去后，系统逐步地朝平衡态演化，这一过程的特征时间为弛豫时间.

1.　Glauber－Master 方程的建立

采用 Glauber 模型，Master 方程可写为：

$$\begin{aligned}\tau_0\frac{\mathrm{d}p(\sigma,t)}{\mathrm{d}t} &= -\sum_j W_j(\sigma_1,\cdots,\sigma_j,\cdots,\sigma_N)p(\sigma_1,\cdots,\sigma_j,\cdots,\sigma_N t)\\ &\quad+\sum_j W_j(\sigma_1,\cdots,-\sigma_j,\cdots,\sigma_N)p(\sigma_1,\cdots,-\sigma_j,\cdots,\sigma_N t)\\ &= L(\sigma)p(\sigma,t)\\ &= -\sum_j(1-p_j)W_j(\sigma)p(\sigma,t)\end{aligned}$$

$$= -\mathscr{G}\varphi(\sigma,t)$$

$$= -\sum_i \mathscr{G}_i\varphi(\sigma,t). \qquad (5.2.12)$$

其中 $W_i(\sigma_i)$ 由(5.2.10)式给出，而 $\varphi(\sigma,t)$ 按(5.2.6)式可写为：

$$\varphi(\sigma) = 1 + h(t)\sum_i \sigma_i. \qquad (5.2.13)$$

注意到在 $\mathscr{G}_i$ 中含 $p_e W_i$，它可表示为：

$$p^{(i)} \equiv p_e W_i(\sigma_i)$$

$$= \exp\left[K\sum_{nn}\sigma_i\sigma_j + 1\right]\exp\left[-K\sigma_i(\sigma_{i-1}+\sigma_{i+1})\right].$$

显然，它代表在 p_e 的表示式中挖去了 σ_i 与 σ_{i-1} 和 σ_{i+1} 之间的相互作用项，如图5.2.1所示. 又利用(5.2.13)式可得：

$$\mathscr{L}_i\varphi = p^{(i)}(1-p_i)\varphi$$

$$= p^{(i)}(2\sigma_i)h(t).$$

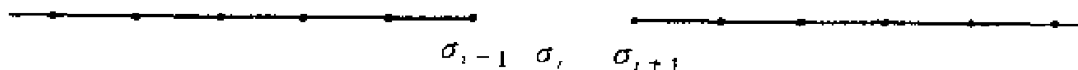


图5.2.1　$p^{(i)}$ 的示意图

2．Glauber－Master 方程的重整化群变换

现在着手进行重整化群变换. 使用 Decimation 方法，变换算符取为：

$$T(\mu,\sigma) = \prod_i \delta(\sigma_{2i} - \mu_i).$$

在方程(5.2.12)左边只包含两种项：一种为 p_e 项，另一种为 $hp_e\sum_i\sigma_i$ 项. 我们将分别研究这两种项.

将 $T(\mu,\sigma)$ 作用于 p_e 项，并对 $\{\sigma\}$ 求和，可得：

$$\prod_i Ae^{K'\mu_i\mu_{i+1}} = \prod_i A\,\mathrm{ch}K'(1+\mu_i\mu_{i+1}\mathrm{th}K')$$

$$= \prod_i \sum_{\sigma_{2i+1}} e^{K\sigma_{2i+1}(\mu_i+\mu_{i+1})}$$

$$= \prod_i \sum_{\sigma_{2i+1}} \mathrm{ch}^2 K[1 + \sigma_{2i+1}(\mu_i + \mu_{i+1})\mathrm{th}K$$

$$+ \mu_i \mu_{i+1} \mathrm{th}^2 K]$$

$$= \prod_i 2\mathrm{ch}^2 K[1 + \mu_i \mu_{i+1} \mathrm{th}K']. \tag{5.2.14}$$

由此可得：

$$\mathrm{th}K' = \mathrm{th}^2 K, \tag{5.2.15}$$

$$A = 2\left(\frac{1 + \mathrm{th}^2 K}{1 - \mathrm{th}^2 K}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\mathrm{ch}K\left(\frac{1 - \mathrm{th}^4 K}{1 - \mathrm{th}^2 K}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.2.16}$$

一般地，若长度重标因子为 b，则有：

$$\mathrm{th}K' = \mathrm{th}^b K,$$

$$A = 2\mathrm{ch}^{b-1} K\left(\frac{1 - \mathrm{th}^{2b} K}{1 - \mathrm{th}^2 K}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

将 $T(\mu,\sigma)$ 作用于 $hp_e\sum_i \sigma_i$ 项，并对 $\{\sigma\}$ 求和时，应区分两种情况：若 σ_i 下标为偶数，只需将 σ_{2i} 改为 μ_i，$p_e(\sigma)$ 改为 $p_e'(\mu)$，而且形式地写为 $\mathscr{R}(h\, p_e \mu_i) = h\, p_e' \mu_i$；若 σ_i 下标为奇数，即 σ_{2i+1}，则在对 $\{\sigma\}$ 进行求和时产生：

$$h\sum_{\{\sigma\}} p_e \sigma_{2i+1} = h\, p_e'^{[i,i+1]} \sum_{\sigma_{2i+1}} \sigma_{2i+1} \{\mathrm{ch}^2 K[1 + \mu_i \mu_{i+1} \mathrm{th}^2 K$$

$$+ \sigma_{2i+1}(\mu_i + \mu_{i+1})\mathrm{th}K]\}$$

$$= h\, p_e'^{[i,i+1]} 2\mathrm{ch}^2 K(\mathrm{th}K)(\mu_i + \mu_{i+1}), \tag{5.2.17}$$

这里 $p_e'^{[i,i+1]}$ 代表在重整化后的 $p_e'(\mu)$ 中缺掉 μ_i 与 μ_{i+1} 间的相互作用项及常数 A，即：

$$p_e'(\mu) = p_e'^{[i,i+1]} A\,\mathrm{ch}K'(1 + \mu_i \mu_{i+1} \mathrm{th}K').$$

注意到：

$$\mathrm{ch}K = \left(\frac{1}{1 - \mathrm{th}^2 K}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{1 - \mathrm{th}K'}\right)^{\frac{1}{2}},$$

(5.2.17)式便可写为：

$$h\sum_{\{\sigma\}} p_e \sigma_{2i+1} = hp_e' \frac{\mathrm{th}K}{1 + \mu_i \mu_{i+1} \mathrm{th}^2 K}(\mu_i + \mu_{i+1})$$

$$= h\, p_e' \frac{\mathrm{th}K}{1 + \mathrm{th}^2 K}(\mu_i + \mu_{i+1}), \tag{5.2.18}$$

其中当 $\mu_i = -\mu_{i+1}$ 时,(5.2.18)式右边为零;而当 $\mu_i = \mu_{i+1}$(即 $\mu_i \mu_{i+1} = 1$)时,(5.2.18)式具有非零值.综合以上可得:

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{R}(hp_e\mu_i) + \mathscr{R}(hp_e\mu_{i+1}) + \mathscr{B}(h\ p_e\sigma_{2i+1}) \\
&= h\ p_e'(\mu_i + \mu_{i+1}) + h\ p_e'\ \frac{\mathrm{th}K}{1+\mathrm{th}^2K}(\mu_i + \mu_{i+1}) \\
&= h\ p_e'\left(1 + \frac{\mathrm{th}K}{1+\mathrm{th}^2K}\right)(\mu_i + \mu_{i+1}). \qquad (5.2.19)
\end{aligned}
$$

若经重整化群变换后的 $\varphi(\mu)$ 表示为:

$$\varphi(\mu) = 1 + h'(t)\sum_i \mu_i,$$

对照(5.2.19)式,立即得出:

$$h' = h\left(1 + \frac{2\mathrm{th}K}{1+\mathrm{th}^2K}\right) \equiv \lambda h. \qquad (5.2.20)$$

在(5.2.20)式中,分子上出现的因子2来源于 $h\ p_e\sigma_{2i-1}$ 和 $h\ p_e\sigma_{2i+1}$ 经变换后分别产生的因子$(\mu_{i-1} + \mu_i)$和$(\mu_i + \mu_{i+1})$,因而每个 μ_i 都出现2次.

变换递推关系(5.2.15)式的不动点 $K^* = \infty$,因此立即求出该点的 λ 值为:

$$\lambda = 1 + \frac{2\mathrm{th}K^*}{1+\mathrm{th}K^*} = 2.$$

一般情况下,

$$\lambda = b.$$

现在转到研究方程(5.2.12)右边的变换,它包含如下形式的项:

$$p_e W_j(1 - p_j)h(t)\sum_j \sigma_j = 2h\sum_j p^{(j)}\sigma_j. \qquad (5.2.21)$$

注意到 $p^{(j)}$ 中不含 σ_j,即与 σ_j 无关,因此,变换作用子 $p^{(j)}\sigma_j$ 时,必须区分:当 $j = 2i+1$,则有 $\sum\limits_{(\sigma)} T(\mu,\sigma)p(j)\sigma_j = 0$;而当 $j = 2i$ 时,相应的自旋变为 μ_i,但 μ_i 与 μ_{i-1} 和 μ_{i+1} 之间并不存在耦合,这可由图5.2.2显示出.

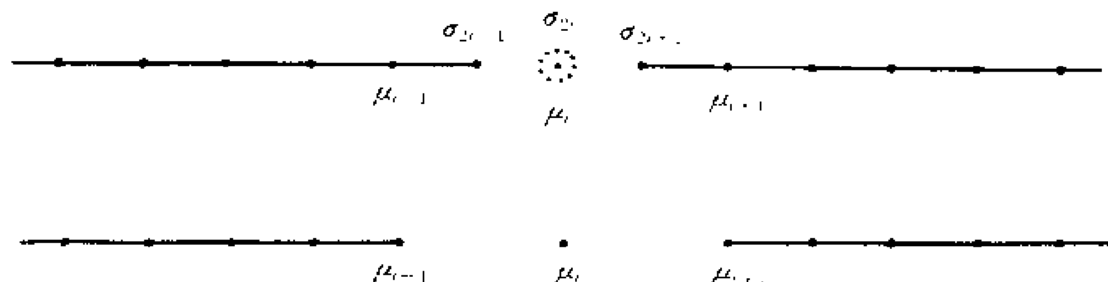


图5.2.2 μ_i 和 μ_{i-1} 与 μ_{i+1} 之间不存在耦合

所以,变换后得到:

$$A^{-2}(p')^{(i)}(\mu) = A^{-2}p_e'(\mu)W_i(\mu).$$

前面因子 A^{-2} 的来由是 μ_i 与 $\mu_{i\mp1}$ 退耦,使得根据(5.2.13)式的计算少掉 A^2 因子.但 $\sigma_{2i-1}\mu_{i-1}$ 和 $\sigma_{2i+1}\mu_{i+1}$ 两部分的贡献也应加上,其结果为:

$$\sum_{\sigma_{2i-1}} e^{K(\mu_{i-1}\sigma_{2i-1})} = \sum_{\sigma_{2i-1}} \mathrm{ch}K(1 + \mu_{i-1}\sigma_{2i-1}\mathrm{th}K)$$

$$= 2\mathrm{ch}K.$$

因此在重整化群变换下,(5.2.21)式变为:

$$2h(2\mathrm{ch}K)^2A^{-2}\sum_i(p')^{(i)}(\mu)\mu_i \equiv 2h\omega\sum_i(p')^{(i)}(\mu)\mu_i.$$

这里已令:

$$\omega = \left(\frac{2\mathrm{ch}K}{A}\right)^2, \qquad 当\ b = 2.$$

在 K 的不动点 $K^* = \infty$,求得:

$$\omega = \frac{1}{2}.$$

最终,对 Master 方程(5.2.12)两边进行空间重整化群变换的结果可使它的形式保持不变,只需相应的量作如下变化:

$$\begin{cases} p(\sigma,t) \to p'(\mu,t), \\ \mathcal{L}(\sigma) \to \mathcal{L}'(\mu), \\ \varphi(\sigma,t) \to \varphi(\mu,t), \\ \tau_0 \to \tau_0' = \tau_0\dfrac{\lambda}{\omega} = 4\tau_0. \end{cases} \tag{5.2.22}$$

在(5.2.22)式的第四个式子中，按5.2.2 定义有：

$$\frac{\lambda}{\omega} = b^Z$$

$$= 2^Z = 4.$$

所以，动力学临界指数 $Z = 2$，这一结果与精确求解结果完全一致.

5.2.4　无分支 Koch 曲线的临界动力学[13]

现在来研究分形晶格上的临界动力学，对这类系统，迄今还未获得过严格的解析结果，几乎所有的处理都是用 TDRG 方法.

这里选择一类最简单的易于处理的无分支 Koch 曲线作为例子，研究在它上面的动力 Ising 模型的临界动力学.

1.　无分支 Koch 曲线的构造和临界动力学方程

无分支 Koch 曲线用下述过程构成：第 n 级的每段用含 l 段的生成元取代，而形成第 $n+1$ 级，长度重标因子为 b. 图5.2.3 给出 $b = 3, l = 4$ 时无分支 Koch 曲线的构造.

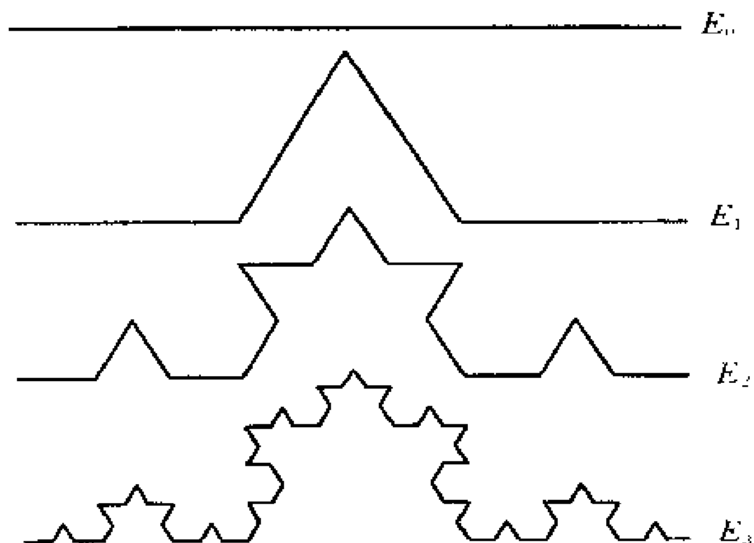


图5.2.3　$b = 3, l = 4$ 时无分支 Koch 曲线的构造

在进行重整化的时候，将第 $n+1$ 级通过 Decimation 消约掉所有内部自旋而成为第 n 级，自旋数目由 N 减少至 N'. 引入下列简化记号：

$$y = \text{th}K, \qquad y' = \text{th}K'. \tag{5.2.23}$$

Master 方程左边变为：

$$\tau_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{\{\sigma\}} T(\mu, \sigma) p(\sigma, y, h) = \sigma_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p'(\mu, y', h'), \tag{5.2.24}$$

其中 $p(\sigma, t)$ 已明显地写成 $p(\sigma, y, h)$，以表示它包含参数 K（通过 y）和 h. 同时，参数 y 和 h 经过重整化群变换为：

$$\begin{cases} y' \equiv \text{th } K' - y^l, \\ h' = b^{d_f} h \equiv \lambda_M h. \end{cases} \tag{5.2.25}$$

这里 l 代表在重标因子 b 距离内有 l 根键，(5.2.25) 式便是参数 K（即 y）的变换递推关系. p 与 p' 的"配分函数"相差因子 $A^{N'}$，即 $Z' - A^{-N'}Z$，其中，

$$A = 2^{l-1} \frac{(\text{ch}K)l}{\text{ch}K'}.$$

Master 方程右边含 $\sum_i h\, p^{(i)} \sigma_i$ 项，由于 $p^{(i)} = p_e W_i$ 是来自细致平衡的，它与 σ_i 无关，因此对那些经变换不留下的自旋有 $\sum_{\{\sigma\}} p^{(i)} \sigma_i = 0$，而对留下的 $p^{(i)} \mu_i$ 项，除了围绕 μ_i 的相互作用消失外，其他与 p_e 没有什么区别. 所以 $p^{(i)}$ 的生成元只由 $l-1$ 根键组成，对这种键的生成元进行求和后，得到因子 $2^{l-1}(\text{chK})^{l-1}$，而不是 A. 故 Master 方程右边经变换得：

$$\sum_{\{\sigma\}} T(\mu, \sigma) \sum_{i=1}^{N} h_i p^{(i)} \sigma_i = \left[\frac{1}{A}(2\text{ch}K)^{l-1}\right]^2 \sum_{j=1}^{N} h_j (p')^{(j)} \mu_j$$

$$\equiv \frac{\omega_M}{\lambda_M} L p',$$

这里，

$$\omega_M = \frac{\text{ch}^2 K}{\text{ch}^2 K'} = (1 + y^2 + y^4 + \cdots + y^{2(l-1)})^{-1}. \tag{5.2.26}$$

2. 无分支 Koch 曲线的动力学临界指数

在(5.2.26) 式中已利用：

$$\text{ch}^2 K = \frac{1}{1 - \text{th}^2 K},$$

$$\mathrm{ch}^2K' = \frac{1}{1-\mathrm{th}^2K'} = \frac{1}{1-\mathrm{th}^{2l}K}.$$

在零温不动点 $y^* = 1, \omega_M = l^{-1} = b^{-d_f}$，利用

$$\frac{\omega}{\lambda} = b^{-Z},$$

可得：

$$b^{-Z} = \frac{\omega_M}{\lambda_M} = b^{-2d_f}.$$

最后可写出：

$$Z \equiv Z_M = 2d_f - \frac{1}{\nu} + d_f, \tag{5.2.27}$$

其中 ν 为关联长度临界指数. ν 是根据递推关系 $y' = y^l$ 在不动点 $y^* = 1$ 附近线性化，并按定义求得：

$$\frac{1}{\nu} = \frac{\ln\left(\dfrac{dy'}{dy}\right)_{y^*}}{\ln b} = \frac{\ln l}{\ln b}.$$

以上研究了由(5.2.6)式切断型求得的动力学临界指数，如果采用(5.2.7)式能量型切断进行计算，可得：

$$y' = y^l,$$

$$A = 2^{l-1}\frac{\mathrm{ch}^l(K+h)}{\mathrm{ch}K'},$$

$$h' \equiv \lambda_E h = l\,h = b^{d_f}h,$$

Master 方程右边一个典型项的重整化群变换为：

$$\sum_{\{\sigma\}} T(\mu,\sigma)\ p^{(j)}\mu_j\sigma_1 = (p')^{(j)}\omega^{\frac{1}{2}}2^{l-1}\mathrm{sh}^{l-1}(K+h)A^{-1}\mu_j\mu_{j+1}$$

$$\Leftrightarrow (p')^{(j)}\omega\ (y^*)^{l-1}\mu_j\mu_{j+1}. \tag{5.2.28}$$

值得注意的是(5.2.28)式左边出现 $p^{(j)}\mu_j\sigma_1$ 而不是 $p^{(j)}\mu_j$，这是由于 $\varphi(\sigma,t)$ 中两个自旋相乘的结果. 在不动点，Z 为：

$$Z = \frac{\ln\left(\dfrac{\omega}{\lambda_E}\right)}{\ln b} = 2d_f.$$

这个结果与(5.2.27)式一致，可见在磁化强度型和能量型微扰的切断近似下，系统具有相同的动力学临界指数 Z.

5.2.5　分支 Koch 曲线上动力 Ising 模型的临界动力学[13,14]

1.　分支 Koch 曲线的构造和临界动力学方程

下面讨论分支 Koch 曲线上 Ising 模型的临界动力学. 图5.2.4 给出分支 Koch 曲线的前三个构造阶段,它是由无穷多次迭代产生的. 重整化群的标度变换将第 $n+1$ 级变为第 n 级结构,耦合常数由 K 变换为 K'.

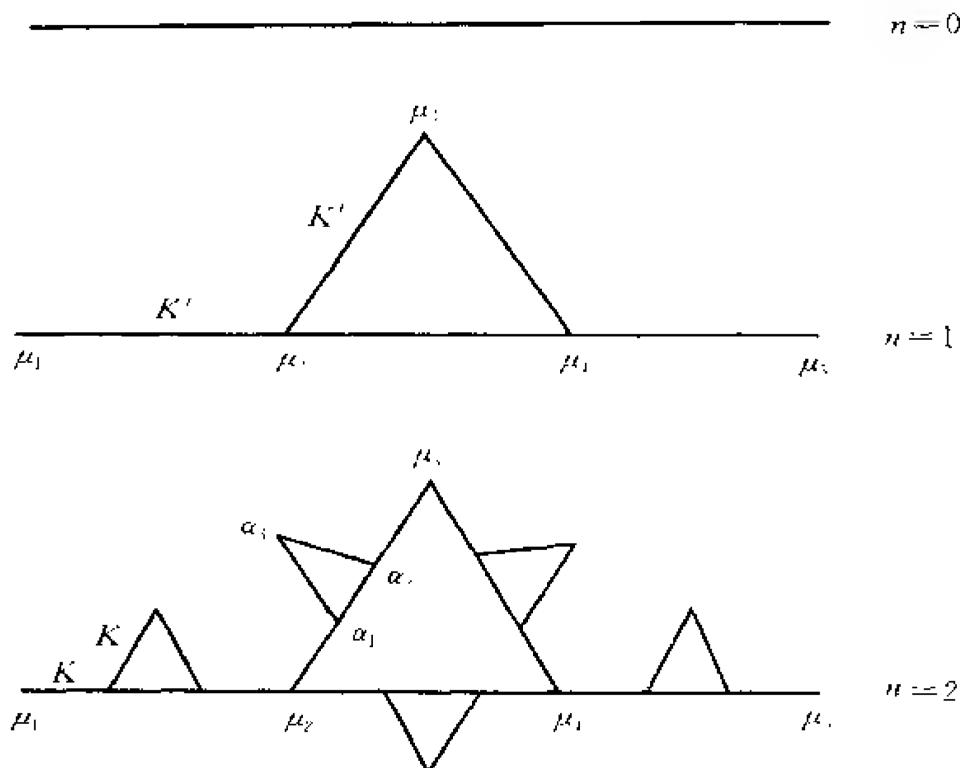


图5.2.4　分支 Koch 曲线的前三个构造阶段

很明显,分支 Koch 曲线与无分支 Koch 曲线的不同之处是存在两类不同的格点(就图 5.2.4 而言),有的格点配位数为 2(例如 μ_3 格点),有的格点配位数为 3(例如 μ_2 格点). 因此在 $\varphi(\sigma,t)$ 的表示式中要引入两个分量磁场 $\vec{h}=(h_2,h_3)$,下标 2,3 代表配位数的数目. (K,h_2,h_3) 构成整个参数空间的不变子空间. 在进行重整化群变换时,产生 y' 与 y 的递推关系(即 K' 与 K 之间的递推关系). 这点很容易从静态重整化群变换求得. 现在主要是需求出重整化的

$\vec{h}' = (h'_2, h'_3)$ 与 $\vec{h} = (h_2, h_3)$ 的变换关系，求出其变换矩阵. 为此，注意 Master 方程左边出现如下两类项：

(1) $\sum_{\{\sigma\}} p_e(\sigma)$，它按静态重整化群的 Decimation 变换直接求出，变换成 $p_e'(\mu)$.

(2) $h_q \sum_{\{\sigma\}} p_e(\sigma)\sigma_i$，若 σ_i 是经 TDRG 方法处理后要保留的自旋 μ，则变换后直接成为 $h_q p_e' \mu_i$（这里 h_q 指 h_2 或 h_3）. 若 σ_i 在 TDRG 方法应用后要消去，如图5.2.4 中的 $\sigma_{\alpha_1}, \sigma_{\alpha_2}, \sigma_{\alpha_3}$，则变换为：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\{\alpha\}} e^{K(\mu_2\sigma_{\alpha_1}+\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}+\sigma_{\alpha_2}\sigma_{\alpha_3}+\sigma_{\alpha_3}\mu_3+\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_3})}(h_3\sigma_{\alpha_1} + h_2\sigma_{\alpha_2} + h_3\sigma_{\alpha_3}) \\
&\quad - \sum_{\{\alpha\}} p_e^{(2-3)}(h_3\sigma_{\alpha_1} + h_2\sigma_{\alpha_2} + h_3\sigma_{\alpha_3}) \\
&\quad = [f(h_2,h_3)\mu_2 + g(h_2,h_3)\mu_3](p_e')^{(2-3)}(\mu),
\end{aligned}
\tag{5.2.29}
$$

其中 $p_e^{(2-3)}$ 和 $(p_e')^{(2-3)}$ 代表重整化前后在统计分布函数中所含与 μ_2, μ_3 间生成元有关的那些项. 经重整化后，μ_2 与 μ_3 的配位数分别为 3 和 2，因此，它们与重整化 h_3' 和 h_2' 相联系，故可写出下列变换关系：

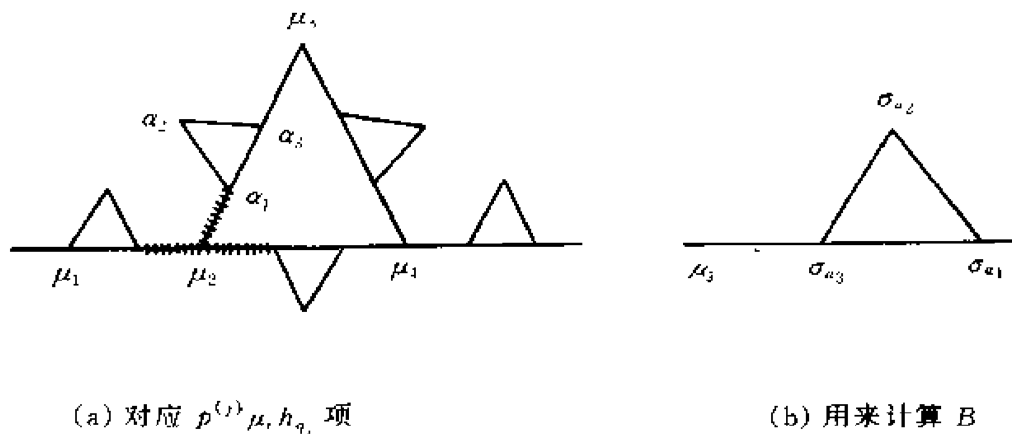
$$
\begin{cases}
h_3' = h_3 + f(h_2, h_3), \\
h_2' = h_2 + g(h_2, h_3).
\end{cases}
\tag{5.2.30}
$$

其中 f 和 g 均为 h_2, h_3 的线性函数，这可通过直接计算证实. 由此可写出变换矩阵 Λ：

$$
\begin{bmatrix} h_3' \\ h_2' \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} h_3 \\ h_2 \end{bmatrix}.
$$

2.　分支 Koch 曲线的动力学临界指数

在 Master 方程右边会出现如下形式的项：$p^{(1)}\sigma_i h_{q_i}$，其中有的 σ_i 项可能在重整化过程中要消去，这种项贡献为零；有的 σ_i 项可能要保留，对这种项的图示见图5.2.5.



(a) 对应 $p^{(j)}\mu, h_{q_i}$ 项　　　　(b) 用来计算 B

图5.2.5　Master 方程右边项的图示

如图5.2.5，μ_2 点的配位数为 3，因此计算结果应含因子 $A^{3}B^{3}$，其中 A 来自：

$$Ae^{K\mu_2\mu_3} = \sum_{\sigma_{\alpha_1},\sigma_{\alpha_2},\sigma_{\alpha_3}} e^{K(\mu_2\sigma_{\alpha_1}+\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}+\sigma_{\alpha_2}\sigma_{\alpha_3}+\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_3}+\sigma_{\alpha_3}\mu_3)},$$

而 B 来自图5.2.5(b) 对所有自旋 $\sigma_{\alpha_1}, \sigma_{\alpha_2}, \sigma_{\alpha_3}$ 求和的贡献. 对配位数为 2 的格点可类似进行计算，那时出现因子 $A^{2}B^{2}$. 最终将 Master 方程右边变换所得 $\dot{h}''$ 表示为：

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_3'' \\ \dot{h}_2'' \end{bmatrix} = \Omega \begin{bmatrix} h_3 \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

这样，只有算出 A 和 Ω 的本征值，取其最大本征值之比便可求出 Z：

$$b^{Z} = \frac{\lambda_{\max}}{\omega_{\max}} \tag{5.2.31}$$

以上计算的细节很繁，在此均予以略去. 计算结果为：

$$Z = \frac{1}{\nu} + d_f. \tag{5.2.32}$$

它与无分支情况的结果相同. 实际上(5.2.32) 式给出了一个联系动力学临界指数 Z 和关联长度临界指数 ν 的新标度律.

应当强调，在(5.2.31) 式中用最大本征值之比来确定 Z 并不是总是正确的，最新的研究表明，矩阵 A 与 Ω 是否是可对易的起着重要作用. 一般性讨论表明，动力学临界指数应为：

$$Z = \frac{\ln\left(\frac{\lambda_{\max}}{\omega_{\max}}\right)}{\ln b},$$

这样就使得以前的结果都应修改,不过实际上的修改只出现在矩阵 Λ 与 Ω 不可对易的情况下.

5.2.6 1 维平移对称晶格上动力 Ising 模型的严格解[11]

本节介绍迄今临界动力学中存在的仅有的严格解,它是对 1 维平移对称晶格来讲的.

1. 1 维平移对称晶格上动力 Ising 模型的 Master 方程

设在 1 维晶格格点上放置 Ising 自旋,最近邻间相互作用为 $K = J/kT(K>0)$,它的模型哈密顿量为:

$$-\beta\mathscr{H} = K\sum_{nn}\sigma_i\sigma_j. \tag{5.2.33}$$

系统与外热源相接触,并处于非平衡态.在系统状态演化过程中的跃迁率为 $W_j(\sigma_j)$.这里我们采用 Glauber 假设,认为单位时间内每次只有一个自旋翻转.Master 方程写为:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_N t) = -\sum_{j=1}^{N}W_j(\sigma_j)p(\sigma_1,\cdots,\sigma_j,\cdots,\sigma_N t) + \sum_{j=1}^{N}W_j(-\sigma_j)p(\sigma_1,\cdots,-\sigma_j,\cdots,\sigma_N t),$$

它支配着系统状态的演化.例如,如果系统最初在受约束的条件下处于用分布函数 $p(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_N t)$ 描述的某个非平衡态,则经过一段弛豫时间后逐渐趋向平衡态,它的演化过程由 Master 方程控制.正如(5.2.10)式和(5.2.11)式式所示,跃迁概率可取为(5.2.11)式,或者利用:

$$e^{\pm K\sigma_j(\sigma_{j-1}+\sigma_{j+1})} = \mathrm{ch}[K(\sigma_{j-1}+\sigma_{j+1})] \cdot \left\{1+\frac{1}{2}\sigma_j(\sigma_{j-1}+\sigma_{j+1})\mathrm{th}2K\right\},$$

可选取:

$$W_j(\sigma_j) = \frac{\alpha}{2}\left\{1-\frac{r}{2}\sigma_j(\sigma_{j-1}+\sigma_{j+1})\right\}, \tag{5.2.34}$$

其中 α 为常数,而且有:

$$r \equiv \text{th}2K.$$

显然,这样选取的跃迁概率既满足细致平衡,又依赖最近邻自旋 σ_{j-1} 和 σ_{j+1}.

现定义函数 $q_i(t)$ 为自旋 $\sigma_i(t)$ 相对于 $p(\sigma_1,\cdots,\sigma_N t)$ 的统计平均值,它也是时间 t 的随机函数:

$$q_i(t) = \langle \sigma_i(t) \rangle = \sum_{\{\sigma\}} \sigma_i(t) p(\sigma_1,\cdots,\sigma_N t).$$

同样,定义两个自旋乘积的统计平均值为:

$$\begin{aligned} r_{jk}(t) &= \langle \sigma_j(t)\sigma_k(t) \rangle \\ &= \sum_{\{\sigma\}} \sigma_j \sigma_k p(\sigma_1,\cdots,\sigma_N t). \end{aligned}$$

若在 Master 方程两边分别乘上 σ_k 和 $\sigma_j \sigma_k$,并对 $\{\sigma\}$ 求和,便得到 $q_k(t)$ 和 $r_{jk}(t)$ 所满足的方程:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q_k(t) &= -2\sum_{\{\sigma\}} \sigma_k W_k(\sigma_k) p(\sigma_1,\cdots,\sigma_N t) \\ &= -2 \langle \sigma_k(t) W_k(\sigma_k) \rangle \end{aligned} \tag{5.2.35}$$

和

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r_{jk}(t) &= -2\sum_{\{\sigma\}} \sigma_j \sigma_k \{W_j(\sigma_j) + W_k(\sigma_k)\} p(\sigma_1,\cdots,\sigma_N t) \\ &= -2 \langle \sigma_j(t)\sigma_k(t) \{W_j(\sigma_j) + W_k(\sigma_k)\} \rangle. \end{aligned} \tag{5.2.36}$$

将(5.2.34)式代入(5.2.35)式和(5.2.36)式便得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\alpha t)} q_k(t) = -q_k(t) + \frac{r}{2}\{q_{k-1}(t) + q_{k+1}(t)\}, \tag{5.2.37}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\alpha t)} r_{jk}(t) = &-2r_{jk}(t) + \frac{r}{2}\{r_{j,k-1} + r_{j,k+1}(t) \\ &+ r_{j-1,k}(t) + r_{j+1,k}(t)\}. \end{aligned} \tag{5.2.38}$$

方程(5.2.37)和(5.2.38)便是以下讨论的新出发点.

2. 严格解

首先求解方程(5.2.37).为此定义下列生成函数:

$$F(\lambda t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda^k q_k(t). \tag{5.2.39}$$

将方程(5.2.37)两边乘以 λ^k，并对 k 求和，可得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\alpha t)}F(\lambda t) = -F(\lambda t) + \frac{r}{2}(\lambda + \lambda^{-1})F(\lambda t).$$

方程的解为：

$$F(\lambda t) = F(\lambda,0)e^{-\alpha t + \frac{r}{2}(\lambda+\lambda^{-1})\alpha t}, \qquad (5.2.40)$$

其中因子 $e^{\frac{r}{2}(\lambda+\lambda^{-1})}$ 恰好是虚宗量 Bessel 函数 $I_n(x)$ 的生成函数：

$$e^{\frac{1}{2}x(\lambda+\lambda^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\lambda^n I_n(x),$$

这里，

$$I_n(x) = i^{-n}J_n(ix).$$

因此(5.2.40)式改写为：

$$F(\lambda t) = F(\lambda,0)e^{-\alpha t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda^k I_k(r\alpha t),$$

再利用(5.2.39)式可得出：

$$q_k(t) = e^{-\alpha t}\sum_{m=-\infty}^{\infty} q_m(0)I_{k-m}(r\alpha t), \qquad (5.2.41)$$

这里 $q_m(0)$ 为第 m 个格点自旋磁矩在 $t=0$ 时刻的初始值.(5.2.41)式给出了方程(5.2.37)的严格解.

其次，求解方程(5.2.38).注意到关联函数 $r_{jj}(t) = \langle \sigma_j(t)\sigma_j(t)\rangle = 1$，因而(5.2.39)式对 r_{jj} 不适用.为了避免出现这一例外，可定义 $\tilde{r}_{jk}$ 为：

$$\tilde{r}_{jk}(t) = \begin{cases} r_{jk}(t) - r_{jk}^{e}, & \text{当 } j > k, \\ -r_{jk}(t) + r_{jk}^{e}, & \text{当 } j < k, \\ 0, & \text{当 } j = k, \end{cases}$$

这里，r_{jk}^{e} 为平衡态时的 $\langle \sigma_j\sigma_k \rangle$，即：

$$\begin{aligned} r_{jk}^{e} &= \langle \sigma_j\sigma_k \rangle_e \\ &= (\mathrm{th}K)^{|k-j|}, \end{aligned}$$

$\tilde{r}_{jk}(t)$ 满足与方程(5.2.38)完全相同的方程.类似于(5.2.39)，引入如下生成函数：

$$F(\lambda_1,\lambda_2,t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty}\lambda_1^j\lambda_2^k\tilde{r}_{jk}(t),$$

便可由方程(5.2.38)产生下列方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\alpha t)}F(\lambda_1,\lambda_2,t) = -2F(\lambda_1,\lambda_2,t) + \frac{r}{2}(\lambda_1 + \lambda_1^{-1})F(\lambda_1,\lambda_2,t) + \frac{r}{2}(\lambda_2 + \lambda_2^{-1})F(\lambda_1,\lambda_2,t).$$

容易求得下列解(对 $j \geqslant k$)：

$$r_{jk}(t) = r^{\varepsilon}_{jk} + \varepsilon^{-2\alpha t}\sum_{l>m}[r_{lm}(0) - r^{\varepsilon}_{lm}] \cdot \{I_{j-l}(r\alpha t)I_{k-m}(r\alpha t) - I_{j-m}(r\alpha t)I_{k-l}(r\alpha t)\}, \quad (5.2.42)$$

其中 $r_{lm}(0)$ 为初值. I_n 为虚宗量 Bessel 函数.(5.2.42) 式便是方程(5.2.38)的严格解.

上述严格(精确)解是 1963 年由 Glauber 完成的.已经发现,如果在哈密顿量中加入次近邻相互作用,便几乎不能求出严格解.

参考文献

[1] 杨展如,分形物理学,上海科技教育出版社,1990

[2] 伍法岳,杨展如,相度与临界现象,物理现象进展,1980(1):100,314,487,511

[3] L.P.Kadanoff,Notes on Migdal's Recursion Formulas,Annals of Physics,1976(100):359

[4] Hu Bambi, Introduction to Real-Space Renormaligation - Group Methods in Cutical and Chaotic Phenomena,Physics Reports,1982(91):233

[5] Y,Gefen,A.Aharong and B.B. Mandelbrot,Phase Transitions on Fractals:I Quasi－Lineac Lattices,J.Phys.,1983,A(16):126

[6] Y.Gefen,A.Aharong,Y.Shapir and B.B.Mandelbrot, Phase Transitious on Fractals: Ⅱ, Sierpinski Gasket, 1984,A(17):435

[7] Y.Gefen,A.Aharony and B.B.Mandelbrot,Phase Transitions on Fractaes: Ⅲ Infiniteey Ranified Lattices,J.Phys.,1984,A(17):1277

[8] Lin Bin and Z.R.Yang,A Suggested Lacunauty Expression for Sierpinski Carpets,1986,A(19):49

[9] Z.R. Yang,Solvable Ising Model on Sierpinski Capets:The Pactition Function, J.Phys., 1994,F(49):2457

[10] Z.R. Yang,Rigorous Spin－Spin Correlation Function of Ising Model on a Special Kind of Sierpinshi Capets,Internationg Center for Theoretical Physics,1993

[11] R.J.Glauber, Time - Depen Dent Statistics of the Ising Model,J.Math.Phys.,1963(4):294

[12] Y.Achiam, The Cutical Dynamics and the Real－Space Renorrmalization－Group,Phys. Rev,1983,A(120):279

[13] Y.Achiam,Cutical Dynamics of the Kinetic Ising Model on the Fractal Koch Cures,Phys Rev.,1978,B(32):1796

[14] D.Kandel, Analysis of a Dynamic Renormaligation - Group Technique, Phys.Rev., 1988,B(38):486

第六章
分形动力学及物理实验

6.1 表面和界面生长动力学

6.1.1 引 言

许多自然和工艺过程导致了丰富多彩而又复杂的界面的形成[1]，这样的例子包括像晶体生长、蒸发沉积、化学反应、腐蚀、侵蚀、多孔介质中的流体流动，以及生物生长等．在生长或形成的过程中，当界面的发展既不是稳定的又不是不稳定时，系统所具有的花样（pattern）是一种界乎稳定状态的粗化界面（rough surface）．这时系统能很好地用自仿射分形（self affine fractal）来描述[2,3]．

近年来，人们对界面生长的动力学过程进行了许多研究，并取得了很好的结果[4,5]．这些进展主要是由于人们对在随机界面生长过程中所具有的标度行为和系统能够自然地发展为稳态的认识，尽管在系统中不存在一个特征时间和空间尺度．但基于标度不变（scale - invariance）和分形的一般概念之上的、描述界面生长的动力学标度方法，已经成为研究界面生长的标准语言．

产生粗糙的表面，一般包括以下三种情况：

（1）靠加入新的物质，如晶体生长、蒸发沉积、电镀、喷射、涂层，以及各种生物生长．

(2) 靠移去部分物质，如化学分解、腐蚀、侵蚀、磨光、耗损，以及各种工艺的打毛过程.

(3) 除上述两类之外，还有一种既没有加入又没有移走物质的过程，如在断裂和不同状态物质的界面.

由此可见，表面科学的一个非常重要而又复杂的问题，是粗糙界面的动力学的研究. 此外，界面的动力学粗化问题是一个远离平衡态现象的典型问题，最近几年的发展非常迅速. 在表面科学各个不同的研究方面，人们提出了各种各样产生粗糙表面的模型，建立了几个动力学方程，并发现了一些普适标度指数类. 因此，本章将对这一领域进行较全面的介绍.

6.1.2　自仿射分形

1.　自仿射分形的定义

自仿射分形是指那些具有仿射变换不变性的客体：如果一小块分形以一种各向异性的的方式放大，而放大后还能与整体相似. 这里特别要强调的是，各向异性的长度再标度. 通常，自相似分形是指在各个方向上以及不同尺寸上都是相似的，而各向异性的长度再标度是指对于不同的坐标方向上，其标度因子是不同的(有关最早文献见 B. B. Mandelbrot 和 R. F. Voss 的文章[2,3,6-8]).

大家知道，粗糙的表面(界面)能用无处可微单值的自仿射函数来描述. 自仿射函数 $h(x)$ 具有

$$h(x_1, \cdots, x_n) = \lambda_1^{-H_1} \cdots \lambda_n^{-H_n} h(\lambda_1 x_1, \cdots, \lambda_n x_n) \tag{6.1.1}$$

的性质，这里 H_i 称为粗糙度或 Hurst 指数或粗化指数[2]. 从标度观点出发，典型的仅有一个特征粗糙度 H，所有 x_i 都是等价的. 从而(6.1.1)式有一简单形式：

$$h(x) = \lambda^{-H} h(\lambda x). \tag{6.1.2}$$

例如，在只有一个变量 x 的情形下，(6.1.1)式表示自仿射函数在沿 x 轴收缩一个 $1/\lambda$ 因子，然后重新以因子 λ^{-H} 标度函数值(也就是在垂直方向)变化. 这样的操作对于一些具有确定性的自仿射函数来说是能够精确实行的，而对于不具有确定性的无规函数，这种操作仅适用于随机情况.

若(6.1.2)式中的 h 可在不同长度 x 上分段来描述，则可以证明(6.1.2)式等价于平均宽度 $W(x)$，并且具有指数 H，在 1 维情形下，也就是：

$$W(x) \Leftrightarrow x^H, \tag{6.1.3}$$

这里 $W(x) = \langle h^2(x) \rangle - \langle h(x) \rangle^2$ 表示在间段为 x 的区域内求平均.另外,两点相距为 x 的高度差则可以标度为:

$$\langle h(x' + x) - h(x') \rangle \Leftrightarrow x^H. \tag{6.1.4}$$

总之,(6.1.1) ~ (6.1.4) 式代表着自仿射表面的几种等价描述,基于定义的各种不同表达方式,能看成为是一种类似的过程.

2. 自仿射分形的例子

为了理解上述自仿射分形的定义,让我们来看几个例子:

(1) 确定的 Weierstrass − Mandelbrot 函数(实部).该函数的实部为:

$$c(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(b^n x)}{b^{(2-D)n}}. \tag{6.1.5}$$

(6.1.5) 式可作为一个定义在有限区域内确定的自仿射分形,如图 6.1.1 所示为 Weierstrass − Mandelbrot 函数的实部[0.5,1.0].

此图与由计算机模拟计算出的自仿射无规表面相似.



图 6.1.1　Weierstrass − Mandelbrot 函数的实部[0.5,1.0]

当 $1 < D < 2$ 和 $b > 1$ 时,它的一次导数处处发散,尽管它本身仍然是连续的.如果我们用 $n + 1$ 代替 n,则得到标度关系:

$$c(x) = b^{-(2-D)} c(bx). \tag{6.1.6}$$

可以看到,(6.1.6) 式等价于定义(6.1.2) 式.

事实上，$c(x)$ 能被视为一个 Fourier 级数，因为在频谱上具有一频率 b^n 是从零铺展到无限的，所以 $c(x)$ 是不具有特征长度标度的．类似地，一个具有粗化指数 H 的随机自仿射函数的 Fourier 谱的系数 $A(t)$ 是独立的 Gauss 无规变量，从而其绝对值能以下列幂次律对其频率进行标度：

$$|A(f)| \Leftrightarrow f^{\;\;H\;\frac{1}{2}}.$$

(2) Brown 点状的自仿射函数．一个限制在 1 维无规扩散的粒子，其点的位置作为时间的函数，可以看成一个确定性的自仿射函数的例子．如图 6.1.2 所示，用一个在单位间距上的递推过程能产生自仿射分形：把具有反对称字母“Z”形体分成 4 段，用前一时刻的整体形状代替其每一段．其中每一段的 2 个端点都视为一个矩形的对角点，每一个矩形又分成 4 段，每一段又用“Z”形的矩形迭代．同时保持其翻转在相同的位置，即每一次翻转都发生在“Z”形的中间．图 6.1.2 表示其前二级迭代．当迭代成为无限时，此函数成为自仿射的．

$n=1$　　$n=2$

$n=3$

图 6.1.2　“Z”形迭代

容易发现在第三级($n=3$)情形下，当系统放回到第二级($n=2$)时，小区域在水平方向以 4 为因子，而在垂直方向以 2 为因子而扩大．对于一个自仿射分形($n \to \infty$)，这样的再标度在所有的长度尺寸上能导致完全重合．当然，对于物理客体，总是存在一个没有贡献的几何特性上的下限，即切断长度．

(3) 无规分数 Brown 函数．在自然界的自仿射分形通常是不确定的．如图 6.1.3 所示为 3 维自仿射表面，是一个定义在高维的无规自仿射函数．此函数

的垂直截面代表分数 Brown 点迹.这些点迹来自于以间距差的标度满足公式(6.1.4)且在1维空间上的粒子运动.对于产生一个具有任意指数为 H 的表面,能用构造一组无规且具有分布 $f^{-H-\frac{3}{2}}$ 的 Fourier 系数的方法,再构造出这样的表面[8].



图 6.1.3　3维自仿射表面

非常有趣的是,Brown 点迹的零集是一个具有分形维数 $D=1-H$ 的普通分形 Cantor 集.这里所指的零集是具有直线 $h(x)=0$ 的点迹的截面.类似地,Brown 图形的零集是一个各向同性的具有 $D_0=2-H$ 的自相似分形.

不像自相似分形那样,自仿射表面不具有单一的分数维数,它的全局行为是用一个整数而且小于它所吸附的空间维数 D 来描述的,而局部性质则可用一个局部分形维数来描述.

我们使用第一章中定义的 Bouligand 维数:

$$D \equiv D_B = \lim_{l \to 0} \frac{\ln N(l)}{\ln\left(\frac{1}{l}\right)}, \tag{6.1.7}$$

这里取直径为 l 的"立方体"作覆盖.再用(6.1.4)式来说明局部和全局的分形维数.

考虑 $0 < H < 1$,由(6.1.4)式,我们有:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{x}=0.$$

相应地，用来描述大尺度行为的全局 Bouligand 维数为 1. 正如我们要用"立方体"去覆盖一个长度远远大于宽度的客体，所需立方体的总数反比于立方体的尺寸，也就是说，有全局维数：

$$D_g \equiv D_{\text{global}} = 1,$$

即：

$$D_g = \lim_{l\to 0}\frac{\ln\frac{1}{l}}{\ln\frac{1}{l}} = 1.$$

我们将看到，$h(x)$ 的小尺度行为能用来决定其局部分形维数 $D_l \equiv D_{\text{local}}$. 考虑在间距 δx 内，$h(x)$ 最大的变化为：

$$\max[h(x)] - \min[h(x)] \Leftrightarrow (\delta x)^H.$$

另一方面，为了覆盖一部分长度为 δx 的 $h(x)$，要用 $(\delta x)^H/\delta x = (\delta x)^{H-1}$ 个边长为 δx 的方块，所以覆盖区域为[0,1]的 $h(x)$，需要的立方体数个是：

$$N(\delta x) \Leftrightarrow \frac{(\delta x)^{H-1}}{\delta x} = (\delta x)^{-(2-H)}. \tag{6.1.8}$$

按(6.1.7)式的定义，则有 $D_l = 2 - H$

上述讨论产生一个问题，即怎样选择适当的单位去测度 h 和 x. 因为 x 很大或很小都是相对于给定的单位长度而言的. 为了同时考查局部和全局的行为，必须选择一个同时用于 h 和 x 的单位长度，然后定义一个量 x_c，即：

$$|h(x+x_c) - h(x)| \Leftrightarrow |x_c|, \tag{6.1.9}$$

x_c 称为 crossover 标度或尺度. 它正好依赖于 h 和 x 的单位，所以 crossover 标度的位置是广义的而非本质的.

从上述讨论得知，系统具有上限和下限长度尺度的自仿射结构，改变尺度单位也许会导致丢失测定局部或全局标度的可能性[9,10]. 事实上，如果我们选择尺度单位，使得 x_c 成为与下限切断相同量级，则局部分形维数不可能观察得到. 这种情形对于一般的格点生长模型是存在的，因为其下限切断尺度(格点间距)正好与 crossover 尺度重合. 然而，没有局部分形维数，并不意味着客体就不是自仿射的，它仅表示当客体在水平方向远大于其垂直方向时，自仿

射性质表现太弱.

6.2　表面生长模型

表面生长是涉及许多同时发生的物理过程的一个典型的复杂现象.人们用各种各样的方法对这一大类现象进行了动力学的研究,包括简化的数值模拟和唯象方程.较早的数值模拟分别见 M.J.Vold 和 M.Eden 的文章[11,12,13].方程(EW 方程和 KPZ 方程)描述分别见 S.F.Edwards 和 D.R.Wilkinson[14]与 M.Kardar,G.Parisi 和 Y.C.Zhang[15]文章.特别是 KPZ 方程,现在已普遍认为它能描述给定的生长基本物理规律.

计算机模拟方法是基于团簇(cluster)生长或集聚模型(aggregation model),可参考文献[16],[17],[18],[19].通常,生长是在一个点阵上进行的,一个格点被占住时,我们称其为一个粒子.而团簇的形成则认为是被占住格点(粒子)与其近邻格点被占住的格点连接而成.当然,也有用非格点(off-lattice)的方法而模拟生长的,在这里就不作介绍,读者可参考文献[19].对于表面生长,其计算机模拟的模型很多,下面举几个主要的例子.

6.2.1　无规沉积模型

一个最常见的表面生长过程是粒子无规则地沉积在冷衬底上,粒子简单地呈直线状下落在衬底上[11,12].在一个 d 维的模拟过程中,无规则地选择在衬底上某一个空位置,然后,让一个粒子从这一位置垂直落下(或以某一固定角度),直到粒子碰到衬底或碰到已形成的表面上.根据用什么方式让这个粒子运动或停止,或粘在已形成的表面上,人们可以定义几种不同的沉积模型.最简单的方法是当粒子碰到衬底或碰到已形成的表面时就停止,并且成为表面的一部分,这是最简单而又平庸的无规沉积模型.图 6.2.1 是典型的无相关的无规沉积.因为各列之间无相关,其列的高度服从 Poisson 分布[20].

实际而有意义的无规沉积模型是具有表面扩散的沉积模型.人们都知道,在蒸发沉积和泥沙淤积过程中,新加入的粒子一般会在沉积表面扩散的.表面扩散导致表面弛豫,其效应类似于液体的表面张力.粒子在表面上运动,直到找到一个最小高度位置而停止其扩散过程.各种模拟表明,表面宽度的涨落与粒子扩散的步长无关.也就是说,由于这种扩散,使得表面光滑.图 6.2.2 是典

型的无规扩散沉积.注意,图 6.2.1 与图 6.2.2 具有相同数量的粒子总数.

图 6.2.1　典型的无相关的无规沉积

图 6.2.2　典型的无规扩散沉积

由上述可见,引入扩散使得表面光滑,但其表面还是微观上粗化的.也正是这种粗化,使得表面生长成为非常有意义的物理现象[20,21].

表面扩散可引出非平凡的列与列之间的相关,由于列与列的相关,从而使得表面涨落具有不同的指数,其生长的动力学过程更为复杂.

6.2.2　直线沉积

直线沉积是一种简单的生长模型[11,12,22],它具有不一般的标度行为.最简单的直线沉积模型是粒子沿直线轨迹落下,一旦此粒子遇到聚集的粒子就停止,而不管它是正好落在聚集体的顶上或边上,这种粘合都要发生.此模型

与无规沉积不同之处是它允许粘合发生在聚集体的边上(最近邻的列上).图6.2.3表示这种直线沉积过程.因为此模型的特殊性,故聚集体内部有空隙而不是实的.但是,数值模拟表面是自仿射分形,而内部却不是分形的.



图6.2.3　直线沉积过程

6.2.3　限制的固体—固体模型

在此类生长模型中,每一步表面生长的每一列的高度增加,不得大于最近邻高度一个粒子高度以上,即 $|\Delta h|\leqslant 1$[23].这样的表面结构相对来说还是较简单的,因为在系统中没有过高的堆积.表面的强相关使得其表面是自仿射分形的,而且其表面的标度行为更容易进行物理上的讨论.其动力学行为与自旋系统有一定的类似性.

6.2.4　其他模型

在上述模型的基础上,近来人们发展了各种相关或变化的模型,可参考文献[4]和[5].同时进行了大量的大规模的计算机模拟,其标度行为也大致可以用两个方程来描述(见下节的讨论).此外,对于分子快速外延生长,人们也提出了其相应的生长模型,见参考文献[24]和[25].

6.3　表面生长的动力学标度

6.3.1　表面粗化指数

对于 $t = 0$ 时的一个 $d-1$ 维平坦表面，怎样来描述由无规涨落引起的表面粗化呢?让我们考虑垂直于生长方向的一个长度为 L 的单元.不失一般性，假设表面存在一个确定的生长方向，并且此表面能用函数 $h(x,t)$ 来定义，此 h 表示在时间 t 及位置 x 的表面高度(相对于 $t=0$).如果 $h(x,t)$ 表示在 x 处的最大高度，那么表面在时间 t 的平均高度定义为：

$$\mathcal{H} = h_{\text{ave}} = \frac{\sum h(x,t)}{L^{d-1}}, \tag{6.3.1}$$

其中求和是对所有 x 进行的.所以表面宽度 $W(L,t)$ 可定义为高度涨落的均方根：

$$W(L,t) = \sqrt{(h^2)_{\text{ave}} - (h_{\text{ave}})^2}. \tag{6.3.2}$$

表面宽度是用来测度生长方向的相关度，它随时间的增长而增加.在没有任何特征长度尺度时，表面宽度就是以时间的幂次形式而增加的[18]，即：

$$W(L,t) \approx t^{\beta}, \tag{6.3.3}$$

其中指数 β 用来描述随时间而增长的沿生长方向的相关度.表面宽度以(6.3.3)式随时间而增长，空间相关的范围也连续地增加.当达到一个特征时间 τ 时，涨落相关则增长到与单元长度 L 可相比.当 $t>\tau$ 时，这种相关停止增长，表面达到一个可用常数表面宽度来刻画的稳态.对于这种稳态，表面具有标度不变性，其饱和表面宽度可用 L 表示[18]：

$$\lim_{t\to\infty} W(L,t) \approx L^{\alpha}. \tag{6.3.4}$$

我们定义 α 为粗化指数.

在稳态情形，表面是标度不变的自仿射分形[2,10].与自相似分形相比，这种自仿射分形不是对所有长度标度不变[9]，即是在不同的方向，它有不同的标度不变性质.对于一个表面，一般具有两个方向，垂直和沿着表面方向.我们可以注意到一个自仿射分形表面，全局地来说它是平坦的，因为对长度尺度大于其表面宽度时，它是一个 $d-1$ 维的客体；而对于长度尺度小于表面宽度时，

表面是粗糙的，且其粗糙度能用指数 α 来刻画[2,10]．当然，可用不同的方式来定义其自仿射分形的维数．然而，所有不同的定义都可以用一个简单的与 α 有关的函数来描述[2,10,9]．因此，指数 α 是描述自仿射分形表面的粗糙度的基本参数．

6.3.2 动力学标度

$W(L,t)$ 与 L 和 t 的关系可结合为一个动力学标度形式[18]：

$$W(L,t)=L^{\alpha}f\left(\frac{t}{L^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right), \tag{6.3.5}$$

这里，

$$f(x)=x^{\beta},\qquad 当\ x\ll 1,$$
$$f(x)=常数,\qquad 当\ x\gg 1.$$

(6.3.5)式实际上隐含一个特征时间常数：

$$\tau=L^{\frac{\alpha}{\beta}}. \tag{6.3.6}$$

图 6.3.1 表示直线沉积的表面宽度的标度行为．

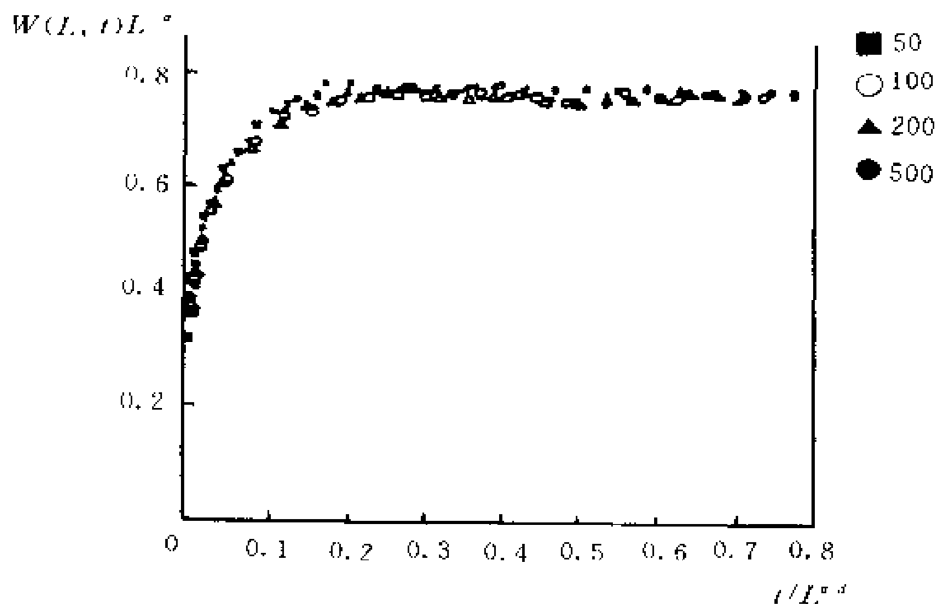


图 6.3.1 直线沉积的表面宽度的标度行为

另一方面，表面宽度 $W(L,t)$ 也可认为是垂直于表面的相关长度的一种

测度.例如,我们认为此相关长度为 $\xi_{\perp}$,则可有:

$$\xi_{\perp} \Leftrightarrow t^{\beta}, \qquad 当\ t \ll \tau, \tag{6.3.7}$$

$$\xi_{\perp} \Leftrightarrow 常数, \qquad 当\ t \gg \tau. \tag{6.3.8}$$

类似地,有平行表面的相关长度 $\xi_{\parallel}$,它表示在时间 t 内表面涨落覆盖空间的长度:

$$\xi_{\parallel} \Leftrightarrow t^{\frac{\beta}{\alpha}}, \qquad 当\ t \ll \tau, \tag{6.3.9}$$

$$\xi_{\parallel} \Leftrightarrow L, \qquad 当\ t \gg \tau. \tag{6.3.10}$$

因为指数 α/β 描述平行相关长度 $\xi_{\parallel}$,我们可以把它看作动力学标度指数 Z,即:

$$Z = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{6.3.11}$$

此外,指数 α 和 β 也可用不同类型的表面相关函数来定义.例如,用高度差相关函数:

$$c(r,t) = [h(x,T) - (h(T))_{\text{ave}}] - [h(x+r,T+\tau) - (h(T+t))_{\text{ave}}], \tag{6.3.12}$$

此处,$(h(t))_{\text{ave}}$ 表示对时间 t 的平均.因此,可以定义一个高度相关函数:

$$G(r,t) = (c(r,t))_{\text{ave}}, \tag{6.3.13}$$

这里的平均是对空间 x 和时间 T.基于动力学标度(6.3.5)式,我们可以得到相关函数 $G(r,0)$ 和 $G(0,t)$,分别表示为:

$$G(r,0) \Leftrightarrow r^{2\alpha}, \qquad 当\ r \ll L,$$

$$G(0,t) \Leftrightarrow t^{2\beta}, \qquad 当\ t \ll \tau.$$

当上面两式的限制关系 $r \ll L$ 和 $t \ll \tau$ 被破坏时,$G(r,0)$ 和 $G(0,t)$ 趋向于饱和状态,即只是与 L 有关的常数关系[26].

对于以下三种生长模型,我们讨论其指数 α 和 β 的值.

(1) 无规沉积.当 $d = 2$ 时,$W \sim t^{1/2}$ 即 $\beta = 1/2$,无 α 值,因为不同的生长列之间无关联,其列的高度 h 遵守 Poisson 分布且与 L 无关.当有表面扩散时,$\beta = 1/4$,$\alpha = 1/2$,可参考文献[20].

(2) 直线沉积.对于直线沉积,许多数值模拟大约形成如下结论:当 $d = 2$ 时,$\beta \approx 1/3$,$\alpha \approx 1/2$;当 $d > 2$ 时,有:

$$\beta = \frac{(5-d)}{(7+d)},$$

$$\alpha = \frac{(5-d)}{6}.$$

特别是高维情形($d > 2$)时,情况变得非常复杂,讨论的内容也相当多,也有不同的争论[18,22].

(3) 限制的固体—固体模型. Kim 和 Kosterlitz 进行了非常完整的讨论和大量的数值模拟. 他们得到如下结论(KK 模型):

$$\beta = \frac{1}{d+1},$$

$$\alpha = \frac{2}{d+2}.$$

到现在为止,没有其他模型能给出这样精确的指数值. 但是,他们关于 α 和 β 的推测公式适用性却受到了基于一些解析分析结果的怀疑. 同时,在对无规媒质的直接聚合物的研究中表明,在表面生长问题中存在一个上限临界维数. 然而这样并不是意味着解决了为什么满足 KK 模型的标度是这样的精确,也没有解决为什么这些指数的值表现出的与别的模型有所不同的问题[23].

6.4　Langevin 方程

6.4.1　EW 方程

1982 年,S. F. Edwards 和 D. R. Wilkinson 首先提出了一个基于 Langevin 类型的唯像模型方程,用来描述晶粒沉积的外形[14]. 他们论证表面的生长能用下述 EW 方程来描述:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \nabla^2 h + \eta(\vec{r}, t), \tag{6.4.1}$$

其中右边第一项为扩散项,第二项为噪声项,参数 ν 相应于表面张力效应,$h(\vec{r}, t)$ 是在位置 $\vec{r}$ 和时间 t 时的 $d-1$ 维的表面高度. 噪声项 $\eta(\vec{r}, t)$ 为具有 δ 函数相关的高斯分布. 即:

$$\langle \eta(\vec{r}, t)\eta(\vec{r}', t') \rangle_{\text{ave}} = 2D\delta(\vec{r} - \vec{r}', t - t'). \tag{6.4.2}$$

因为(6.4.1)式是线性的,所以能用 Fourier 变换来求解. 通过直接计算 W 的

变分，我们得到[20,21,27]：

$$\alpha = \frac{3-d}{2},\quad \beta = \frac{3-d}{4},\quad Z = 2. \qquad (6.4.3)$$

EW 方程(6.4.1)为我们提供一个具有表面弛豫的沉积过程的唯象的描述.无规沉积由噪声项描述，而表面弛豫由表面张力项(扩散项)给出.如不考虑表面扩散，则 EW 方程($v=0$)描述前面讨论过的无规沉积，表面宽度 W 随 $t^{1/2}$ 而变化，即给出 $\beta=1/2$ 的情形.对各种无规沉积模型(有表面扩散)的数值模拟，其结果与 EW 方程所预言的一致，从面说明 EW 方程的正确性.

6.4.2　KPZ 方程

为了解释像在直线沉积和 Eden 模型中的边枝生长问题，M. Kardar，G. Parisi 和 Y.C. Zhang 改进了 EW 方程，称为 KPZ 方程[15]：

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu\nabla^2 h + \frac{1}{2}\lambda\mid\nabla h\mid^2 + \eta(\vec{r},t), \qquad (6.4.4)$$

其中参数 λ 为垂直于表面的生长速率.KPZ 方程在 $d=2$(即一个 1 维表面)能够用动力学重整化群来分析.分析表明存在两个固定点：一个固定点相应于不存在非线性项$(1/2)\lambda\mid\nabla h\mid^2$ 的 EW 方程的结果.另一个固定点则对应于强耦合，即大 λ 极限，并且给出：

$$\alpha = \frac{1}{2},\quad \beta = \frac{1}{3},\quad Z = \frac{3}{2}.$$

此外，重整化分析表明，KPZ 方程的指数 α 和 β 满足指数关系(标度律)[15,22,28,29]：

$$\alpha + \frac{\alpha}{\beta} = 2. \qquad (6.4.5)$$

此关系对不同类型的表面生长模型都能满足，这也许是基于不同类型的表面生长模型的伽利略不变性的一般结果[30].

许多模型的计算机模拟结果表明，KPZ 方程的 2 维结果与模拟结果一致.这也说明 KPZ 方程提供了一个很好的关于表面生长的理论描述，但对 $d>2$ 的精确结果却与数值模拟结果有些矛盾.关于这种高维结果，近来在许多文献中有讨论[23]，在这里就不再介绍.

关于动力学重整化群的论证，请参考文献[15]和[31].

对于表面生长和表面自仿射分形的动力学研究，国外发展迅速，各种模型

层出不尽.前阶段的研究主要是集中在各种模型的标度分类.大部分模型都可以用 KPZ 方程来描述,其指数亦与 KPZ 预言的相符合.近来的研究主要集中在建立与实验相近的分子束外延生长模型的模拟[24,25].对噪声的引人,不是简单地用高斯分布,而用与幂指数有关的噪声谱[32].此外,研究生长模型与自旋系统之间的等价描述也是一个相当活跃的课题[33];形貌相变是否存在,也有许多讨论[34];对于实际情形中的多种类型粒子的同时生长,也有新的模型[35].

总之,表面动力学生长问题不但是一个与非平衡统计有关的问题,也是研究固态材料特性的基础问题.

6.5　分形生长现象的实验研究

6.5.1　引言

迄今为止,人们对一类具有平移不变性的物质,如晶体等的物理性质已经做了深入的研究,有了较为透彻的了解.然而,对另一类具有标度不变性的物质或形态,如具有分形特征的尘埃聚集体、宏观尺度上河道和海岸线的分布等,则研究得不多.物质世界的很多形态具有分形的特征,大到星云,小到微米甚至纳米尺度的晶核,都能观测到分形的存在.物理学家大规模地介入分形的研究始于80年代初.当时 T.A.Witten 和 L.M.Sander 开创性地提出了扩散限制聚集(diffusion limited aggregation)的分形生长模型[36].这个模型很快被物理学家们所接受,并用来解释各种与分形有关的生长和聚集现象.物理学家对分形的兴趣主要来源于两个方面.首先,在很多一级相变过程中,新相的成核和生长都是以分形为特征的,尤其是在生长驱动力较大的情况下.研究分形的形态特征、生长过程和生长界面的动力学行为,对研究相变中涉及的形态学和动力学问题显然是很有帮助的.另一方面,具有分形特征的物质的一些性质,使得这类材料具有潜在的应用.众所周知,通常晶体或非晶体物质的密度在一定尺度以上具有一恒定的值,它不再随尺度的改变而变化.然而对分形物体,其质量 $M \propto R^{D_f}$,因而其密度:

$$\rho \propto \frac{R^{D_f}}{R^D} = R^{D_f - D}.$$

随着 $R \to \infty$,密度是趋于0的,如图6.5.1所示.此外,对具有分形特征的物质来说,其他的物理性质,如原子散射因子、振动谱等都将发生变化.从材料研究的角度看,这些也许是设计和制备新材料的一个可能的途径.

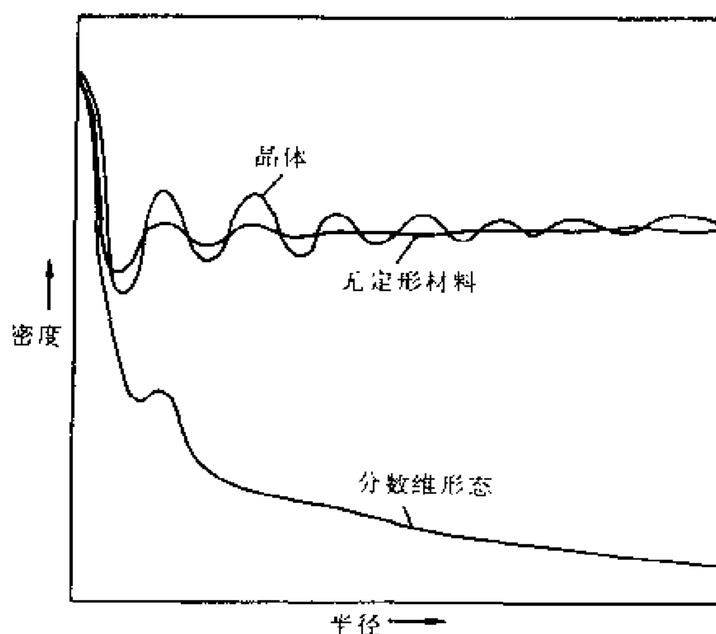


图6.5.1　物质密度与测量尺度间的关系

值得指出的是,生长界面前的物理、化学环境对界面生长模式和生长形态的选择具有重要意义.最近的研究表明,生长界面前的物理、化学环境在一定的条件下可能自发地出现振荡,从而导致一系列生长形态和生长模式的时间周期变化.这些现象对于研究不同形态之间的转变规律和机制,研究非线性系统中的图形形成和演变都是至关重要的.

6.5.2　生长形态的计算机模拟

目前关于分形形态的研究大部分是利用计算机模拟完成的,因此,在讨论分形生长现象的实验研究之前,有必要对利用计算机 Monte Carlo 模拟研究分形的工作做一个简单的回顾.

80 年代初,T. A. Witten 和 L. M. Sander 提出了 DLA 模型[36].考虑一个 2 维晶格.首先选定 1 个种子(核).以种子为中心、一定尺寸为半径,设定 1 个边

界.以此边界为粒子源.在边界上随机选取 1 个点,从该点发射出 1 个粒子,通过随机行走向中心处的核逼近.随机行走的步长对各个方向都是恒定的.一旦粒子到达核,即停止行走并成为核的一部分.此后,再次从边界上随机选点,发射粒子……这样的过程不断重复下去,当聚集体长大到一定程度后,便形成了无规分叉的分形形态.图6.5.2 为 DLA 模型的聚集形态及其密度相关函数.图6.5.2(a) 显示了 3 000 个粒子组成的分形形态,它和枝晶有相似之处,但缺乏明显的各向异性.为了定量地检验形态的标度不变性,对该分形的密度相关函数

$$C(r) = \frac{1}{N}\sum_{r}\rho(\vec{r}+\vec{r}')\rho(\vec{r}') \tag{6.5.1}$$

进行测量.对于多个聚集体的测量结果,如图 6.5.2(b) 所示,数据可用 r 的非整数幂函数来拟合.其幂指数与分形的维数有线性关系[37,38].由于无规行走的粒子一旦到达聚集体即成为聚集体的一部分,这对应于生长驱动力极大、系统远离平衡态的生长.

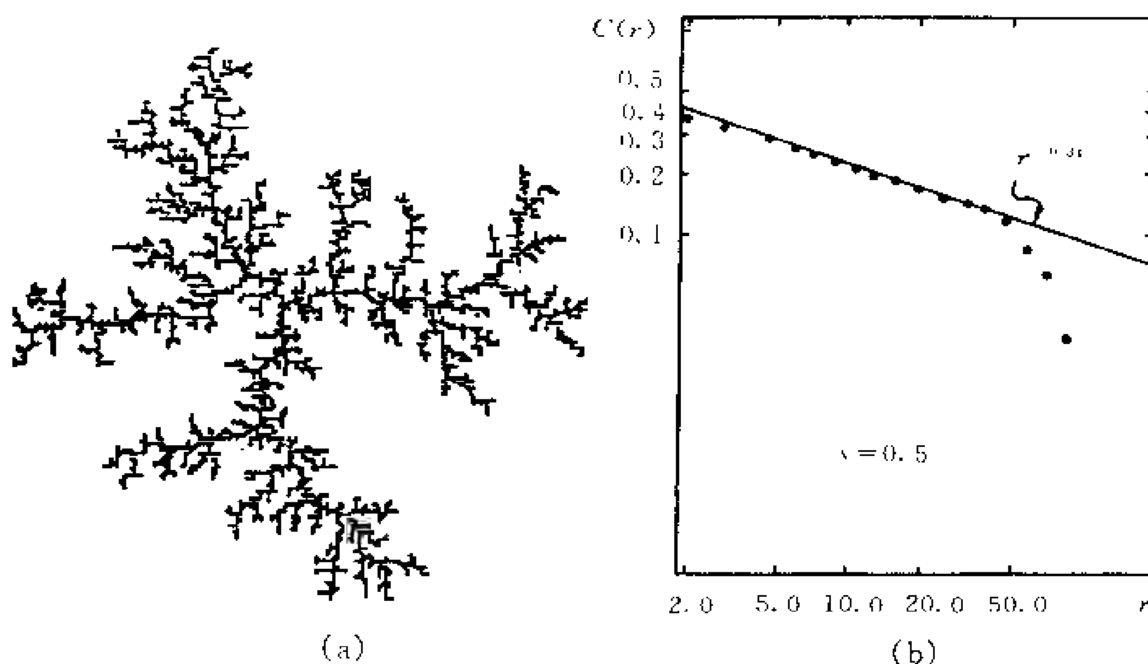


图6.5.2　DLA 模型的聚集形态及其密度相关函数

真实的生长系统中有可能出现非线性的生长几率分布,因此,在此后的模

拟中,人们引进了局域生长几率函数[39,40].生长几率函数可以反映出粒子间的相互作用、附着点的最近邻占据数、生长界面的曲率等参量,进而可以模拟 Gibbs-Thomson 效应对生长形态的影响[40],肖荣福等人[40]对 DLA 模型作了进一步的改进,引进了界面动力学过程和表面扩散等因素,使得这个计算机模型更接近实际晶体生长过程.该研究组等人还在 DLA 模型的基础上研究了对流对生长形态的影响[41].

DLA 模型只考虑一个核的生长,在真实系统中当然不只存在一个聚集体.因此人们又提出了多于一个聚集体的 Cluster – Cluster DLA[42] 模型.在 Cluster – Cluster DLA 模型中,不仅考虑粒子的行走,而且考虑到不同聚集体之间的相互运动和相互作用.

DLA 模型之所以具有如此大的影响,主要在于它实际上描述了一类扩散场中的生长.在具体的形态生长过程中,无论是晶体的生长(浓度场或温度场),还是电化学沉积(电场 + 浓度场),或是电介质击穿(静电场),都是受某个拉普拉斯场或扩散场控制的.事实上,在 DLA 模型中,粒子是通过随机行走向中心的核逼近的.某粒子在行走 k 步后在 $\vec{r}$ 处被发现的概率可写成 $U(\vec{r}, k\tau)$,即:

$$U(\vec{r}, k\tau) = \frac{1}{c}\sum_{\vec{a}} U(\vec{r}+\vec{a}, (k-1)\tau), \qquad (6.5.2)$$

其中 c 为某格点的近邻格点数,对于三角点阵 $c=6$,而对正方点阵 $c=4$;τ 是每行走一步所需要的时间;$\vec{a}$ 代表粒子从 $\vec{r}$ 处可能行走的几个方向.很显然,(6.5.2) 式是扩散方程 $\partial U/\partial t = D\nabla^2 U$ 的离散形式.对于质量传输系统,$U(\vec{r}, t)$ 可以看作是规一化的浓度场:

$$U(\vec{r}, t) = \frac{C(\vec{r}, t)}{C_{\max}},$$

其中 $C_{\max}$ 是粒子源处的浓度.当 $U(\vec{r}, t)$ 随时间缓慢变化时,$\partial U/\partial t = 0$,故有:

$$\nabla^2 U(\vec{r}, t) = 0.$$

描述无规分叉形态生长的另一个模型是由 L. Niemeyer, L. Pietronero 和 H. J. Wiesmann 提出的静电击穿模型(DBM)[43].这个模型最初是为了描述复杂的放电图案,后来人们发现它具有更深刻的物理含义.DBM 中第 i 点的生长几率 P_i 可表示为:

$$P_i = \frac{|\nabla \Psi_i|^\eta}{\sum_i |\nabla \Psi_i|^\eta} \tag{6.5.3}$$

其中 Ψ_i 是第 i 点处的电势，η 是一个参数. 当 $\eta = 1$ 时 DBM 就变成 DLA；而当 $\eta = 0$ 时 DBM 变成人们熟悉的 Eden 模型.

除了 DLA、DBM 等模型外，近年来人们又根据各自实验系统的特点提出了一些模型，如成核限制的聚集模型（NLA 模型）等[44].

6.5.3　晶体生长中分形的实验观测

晶体生长系统大致可分为熔体生长、水溶液生长和气相生长系统. 本节只讨论水溶液生长系统中晶体的一些生长形态. 水溶液生长通过控制溶液的温度来控制溶液的过饱和度，从而控制晶体的生长. 在该系统中生长驱动力可表示为[45]：

$$\frac{\nabla \mu}{kT} = \ln \frac{C(t, T)}{C_0(T)}, \tag{6.5.4}$$

其中 $\nabla \mu$ 为化学势的变化，k 为玻尔兹曼常数，$C(t, T)$ 为溶液在 t 时刻的浓度，此时的温度为 T，而 $C_0(T)$ 为温度 T 时溶液的饱和浓度. 在低过饱和度下，即：

$$\sigma = \frac{C(t, T) - C_0(T)}{C_0(T)} \ll 1$$

时，$\frac{\nabla \mu}{kT}$ 可表示成 $\frac{\nabla \mu}{kT} = \ln(1 + \sigma) \approx \sigma$.

H. Honjo 等人曾在 NH_4Cl 水溶液生长系统中研究了 NH_4Cl 晶体的分形生长[46]. 饱和 NH_4Cl 水溶液被封在两个透明的刚性界面之间. 实验中发现，如果上下两刚性界面都是平滑的，则生长形态为枝晶，如图6.5.3 所示. 如果将其中的一个光滑边界改为粗糙边界，则有可能观察到分形状的晶体形态（图 6.5.4）. 图 6.5.4 显示了分形状生长界面的时间演变过程. 通过对生长几率的标度性质的分析，可以得到生长形态的广义维数 $D(q)$[47]. 再进行 Legendre 变换可以得到 $f(\alpha)$ 谱. 生长形态和过程的标度性质的分析，可以提供生长机制和生长动力学方面的信息.

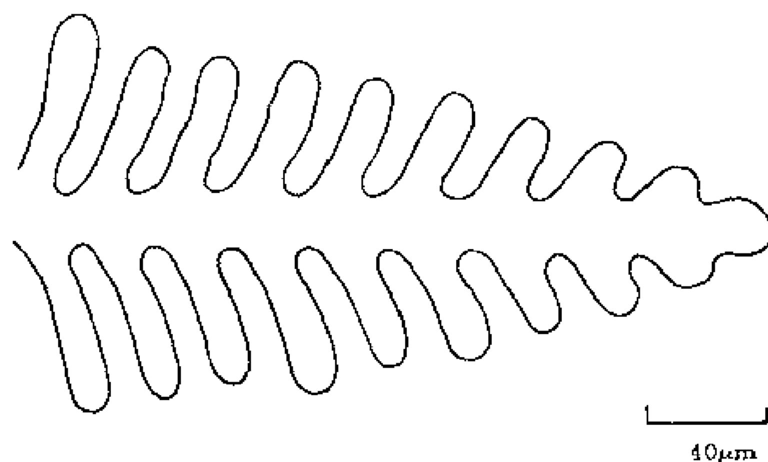


图6.5.3　水溶液生长中的 NH_4Cl 晶枝

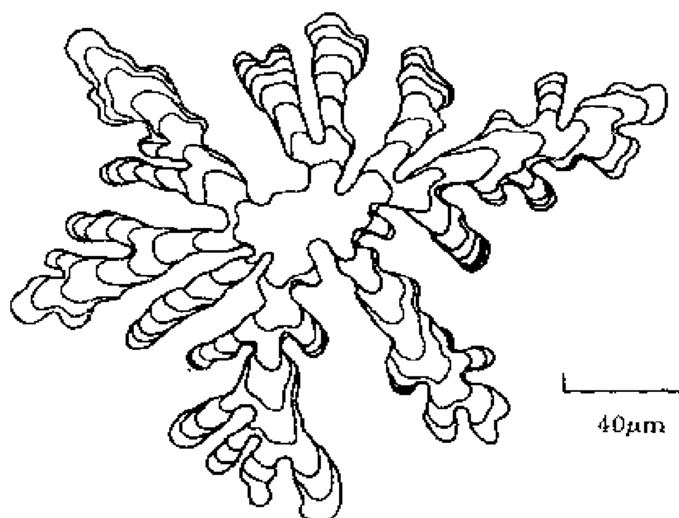
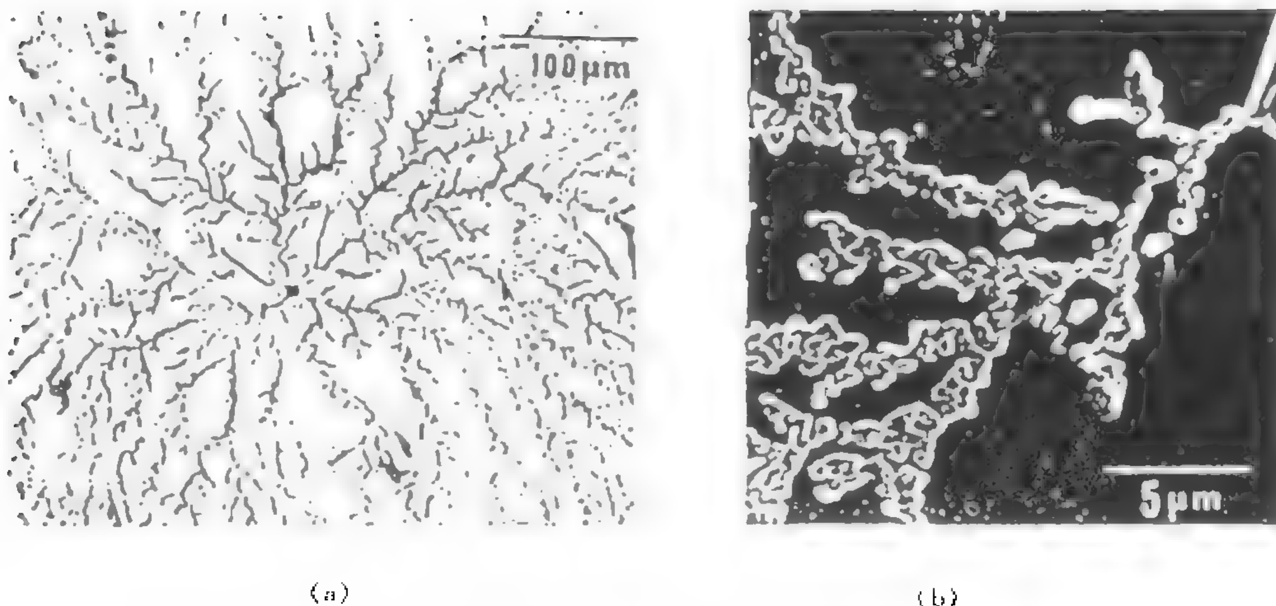


图6.5.4　水溶液生长中的 NH_4Cl 分形的时间演变过程

当生长驱动力很大时，分形的生长过程有可能变得不连续. 在这种情况下，成核过程控制了分形的生长. 从微结构上来看，此时的分形是由很多小晶核构成的. 图6.5.5(a) 显示了成核控制条件下所得到的分形状聚集体图6.5.5(b) 是该聚集体在扫描电镜下观察到的微观结构. 实时原位观测技术显示在该生长系统中分形的生长是通过枝叉尖端连续成核来实现的. 由于晶体的成核过程控制着分形的生长，因此，这个过程被称为成核限制的聚集模型(NLA)[44]

图6.5.5 显示的分形中相邻的小晶粒在成核时没有明显的结晶学取向上

的关联.当相邻小晶粒在结晶学取向上有明显关联时,整个分形形态将呈现一些有趣的特征.



(a) (b)

图6.5.5 连续成核控制的分形形态

图6.5.6是在凝胶生长系统中观测到的 NH_4Cl 的一种新的分形形态[48].

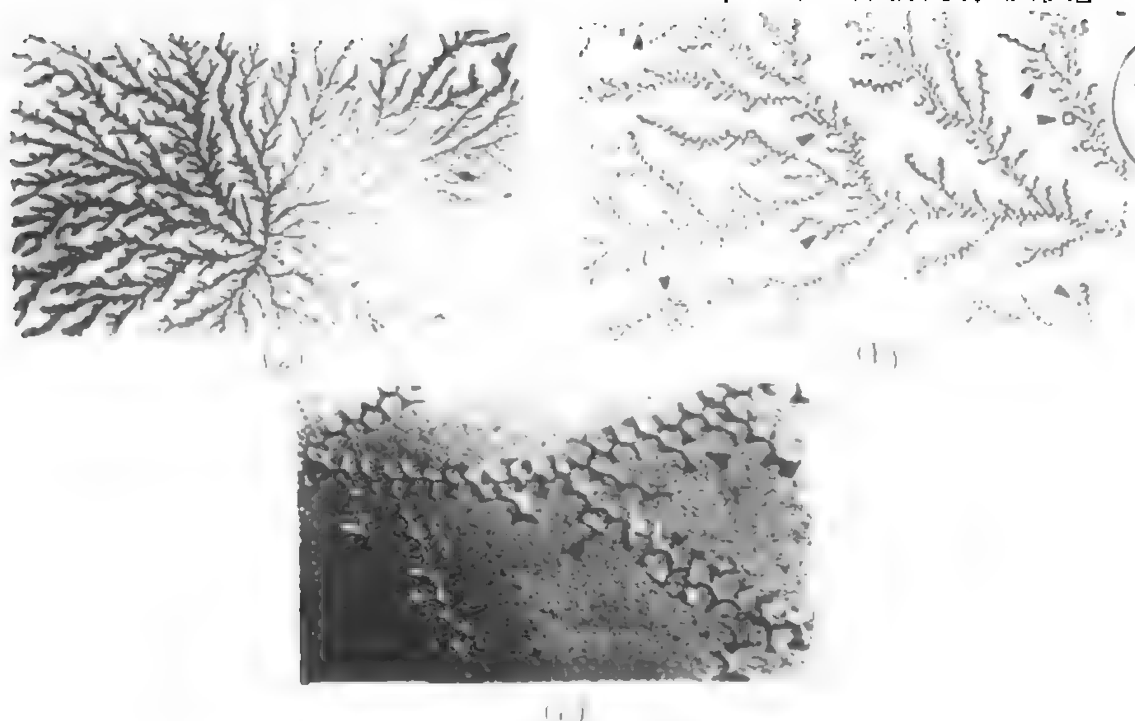


图6.5.6 NH_4Cl 的一种新的分形形态

尽管从整体上聚集体仍保持了分形的特征，但是每一个枝叉中的小晶粒不再是随机的．晶粒间的特定结晶学取向使得枝叉成 Zigzag 的形态，如图6.5.6(b)、(c) 所示．小晶粒成核时强烈的各向异性使得枝叉中出现很多圈环，而这种现象在 DLA 中是极少出现的．除了生长中的各向异性外，原子力显微术显示晶粒的表面存在很多聚并的台阶，说明晶粒生长时的驱动力是低于 NH_4Cl 生长的动力学粗糙化转变临界值的[48]．因此，图6.5.6显示了一种在很低生长驱动力、极强的生长各向异性条件下的分形聚集形态．

利用 Argoul 等提出的方法[47]，可以计算 NH_4Cl 小晶粒组成的分形的重分形谱(图6.5.7(a))．作为比较，我们又计算了在 $Ba(NO_3)_2$ 水溶液中生长的 NLA 分形(图6.5.7(b))和计算机生成 DLA 的分形形态(图6.5.7(c))的重分形谱．很明显，这些分形图样都不具备全局自相似性．

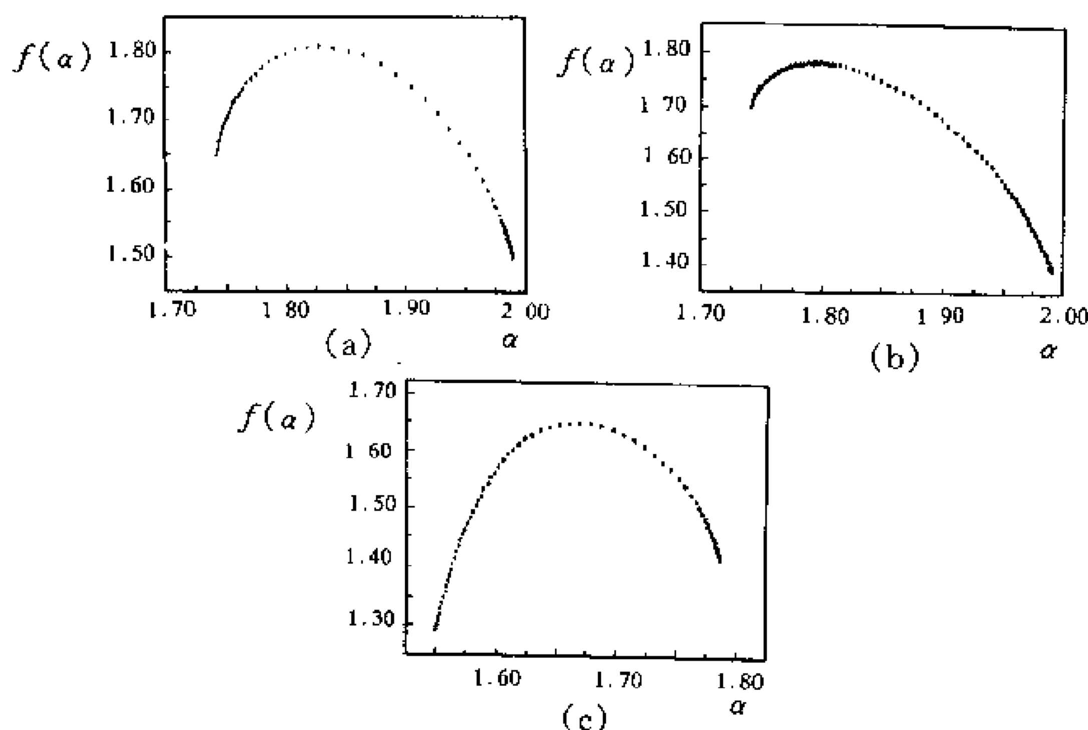


图6.5.7　几种分形形态的重分形谱

由图 6.5.7 可以看出，这三种分形图样重分形谱的最大值都不同，对于 NH_4Cl 分形，$D_0 - 1.82$；对 $Ba(NO_3)_2$ 小晶粒组成的 NLA 模型，$D_0 = 1.78$；对 DLA 模型，则有 $D_0 = 1.67$．DLA 生长是由扩散场控制的，由于屏蔽效应，整个

DLA 分形图样枝叉比较稀疏，从而维数降低．根据以前在 $Ba(NO_3)_2$ 水溶液中实验分析，随机成核生长的分形聚集体会比 DLA 的维数高，而成核过程中结晶学取向的影响使分形图样更加致密．根据重分形理论，$f(\alpha)$ 谱中，α_{max} 和 α_{min} 分别代表分形测度上最致密和最松散的区域的标度行为．对于受成核控制的两种分形聚集，尽管具体的成核行为和晶核的结晶学取向各不相同，它们的 α_{max} 和 α_{min} 是基本一致的，但 DLA 模型则与它们不同．这说明成核控制的生长与扩散限制的生长的确是两种不同的生长机制．在 DLA 模型中，生长概率与成核率成正比，即：

$$P_t \propto I_t \propto \exp\left\{\frac{-\alpha}{\ln\left[\frac{c(x,t)}{c_0(T)}\right]^2}\right\} = \exp\left\{\frac{\alpha}{[\ln(1+\sigma)]^2}\right\}, \tag{6.5.5}$$

其中 $\alpha = 4\gamma_{sl}^3\xi^3/27k^3T^3$，$\xi$ 为晶核的几何因子，γ_{sl} 为固液界面的表面张力，它是结晶学取向的函数．当各向异性很强时，成核只能在一些特定的方向上进行．

NLA 模型与 DLA 模型的区别在于：DLA 过程直接受拉普拉斯场控制，因而它的生长速率与某个物理量的梯度成正比．例如，在水溶液系统中生长速率正比于 $\nabla c(r,t)$；而 NLA 的生长速率是与成核率成正比．它是生长界面前浓度场的非线性函数，如(6.5.5)式所示．此外，虽然晶核的生长也是受溶质扩散场控制的，但激发成核的过程却是与浓度场独立的．NLA 与 DBM 都是局域生长模型，但它们之间的差异也是显而易见的．从(6.5.3)式可以看到 DBM 的生长几率与浓度场梯度的 η 次方成正比，这比(6.5.5)式表示的 NLA 的生长几率要简单得多。

除了溶液、熔体生长系统外，在利用分子束外延进行薄膜生长时，薄膜生长初期的形态也与分形相关[50]．分形枝叉相互交织，最后形成一层薄膜[51]．其他的薄膜生长过程也常观察到分形．例如利用溅射方法长在 SiO_2 衬底上的 $NbSe_2$ 形成树枝状的形态[52]，如图6.5.8 所示．对形态的分析表明，其维数为 1.7．在非晶薄膜晶化过程中，人们也观测到很多分形形态．对薄膜生长系统中的分形形态进行原位实时研究一般是比较困难的．但是，人们可以在薄膜生长的不同时刻对生长形态进行分析，从而得到分形生长的统计信息．

分形生长的研究目前仍有不少问题未解决.一般认为分形是远离平衡态的生长形态(较高生长驱动力),它的生长要求较低的各向异性.然而图6.5.6显示分形能在很小的生长驱动力和较高的各向异性下出现.这些实验观察表明我们对分形的生长并没有完全了解.此外,为什么DLA产生的形态是分形而不是没有任何对称性的无定形形态,各向异性在枝晶和分形生长中各起什么作用.这些问题的解决不仅需要更多、更严格的实验观测,更有待分形数学和分形物理的进一步发展.

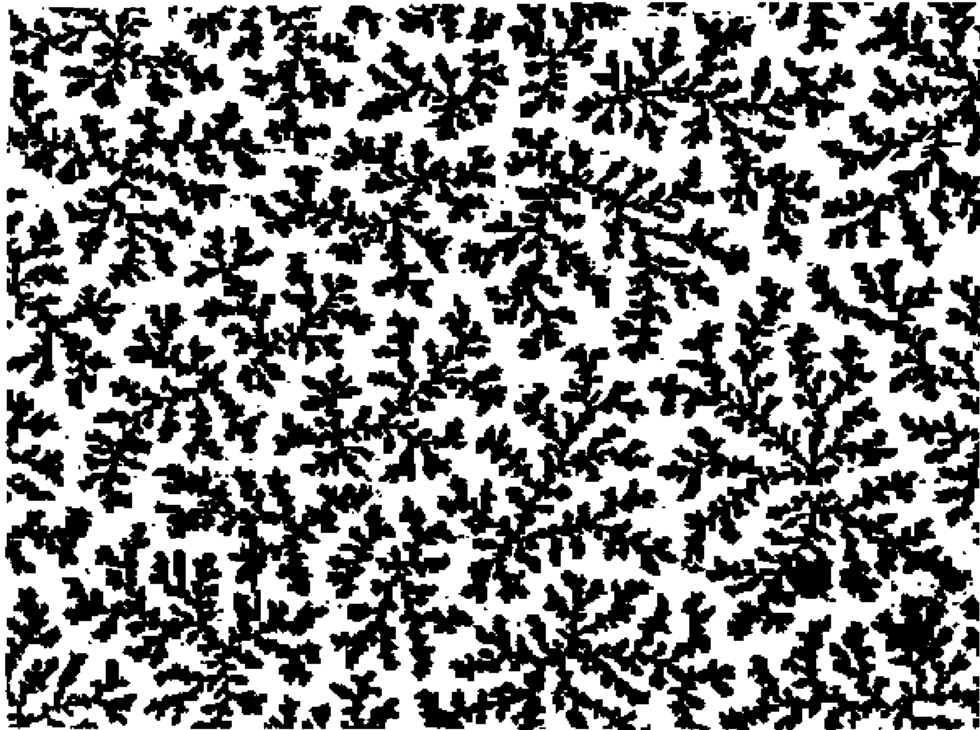


图 6.5.8 $NbGe_2$ 薄膜生长中的分形形态

6.5.4 生长机制和形态的时空演变

在界面生长中生长机制决定了界面的形态.最近的研究表明,在考虑体扩散和界面扩散耦合的情况下,界面上吸附分子浓度和界面前体分子浓度会发生失稳,出现自发的时空振荡.这种振荡可能是P. Vekilov等人观察到的晶体生长时下涉条纹位置涨落[53]的物理原因之一.当这种浓度场的振荡发生在晶体生长的动力学粗糙化转变临界浓度附近,则有可能观察到周期性的界面生

长模式的转变.

晶体生长理论表明,光滑界面和粗糙界面的生长具有不同的动力学规律.光滑界面的生长是通过台阶运动进行的,生长单元一般在晶体台阶的扭折处被吸收,晶体一层层地生长,这是一个不连续的过程.粗糙界面处处都可能是生长位置,它的生长是连续的.界面生长中存在着两种类型的粗糙化转变:当生长系统温度大于临界温度 T_r 时,形成单原子台阶的自由能(棱边能)趋于零,从而导致界面粗糙化,这被称为热力学粗糙化.当系统的生长驱动力足够大,使2维成核的临界尺寸变得足够小,这时出现的界面粗糙化转变称为动力学粗糙化转变.粗糙化转变作为一种有序—无序相变而被深入地研究.

在对图6.5.6所示的 NH_4Cl 结晶行为进行研究时,人们发现当 NH_4Cl 浓度很低时,晶粒是完全小面化的,相邻晶粒有着明显的结晶学取向,结晶学取向间的强烈关联造成了Zigzag的枝叉.当 NH_4Cl 浓度增大时,晶粒表面形貌发生很改变,如图6.5.9所示.大部分晶粒表面变成粗糙的,在粗糙的晶粒间分布着小面化的晶粒.或者说,晶体生长过程中发生了周期性的粗糙化转变[54]

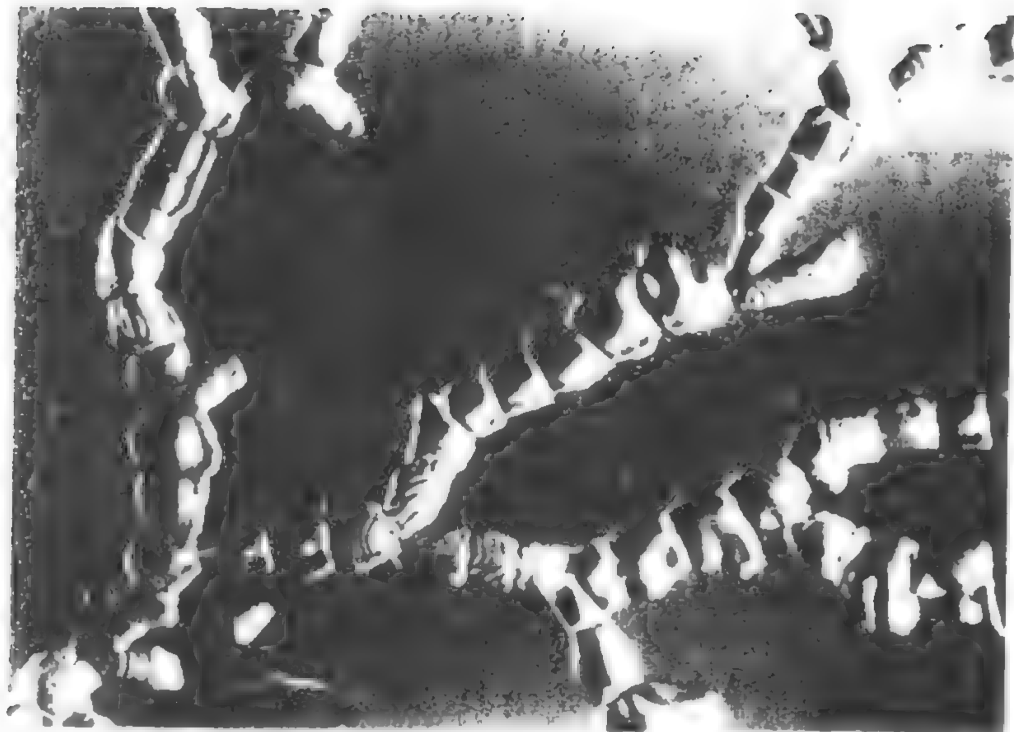


图6.5.9 晶体生长中观察到的周期性粗糙化转变现象

小面化的晶粒表面有许多台阶，在台阶表面可以清楚地看到晶核，这说明小面化区域的生长是通过2维成核进行的．在两个小面化生长区域之间，则是一些具有粗糙表面的小晶粒．这些晶粒的表面曲率连续变化．实验研究表明，这种周期性的粗糙化转变可能是动力学粗糙化转变，它是由于生长界面前的浓度场在粗糙化转变临界浓度附近振荡造成的[54]．



图6.5.10　交替出现的枝晶和致密分叉形态

生长界面前的浓度场振荡不仅可能造成生长模式的周期变化，还可能导致生长形态的周期转变．人们在电化学沉积系统中就观察到这类形态转变．电化学沉积系统因其装置简单、实验方便而成为被研究得较多的系统之一，当电极间被加上一定的电压后，阳离子向阴极运动并在阴极上得到电子还原成原子沉积下来，阴极沉积物在一定条件下可长成具有分形或枝晶特征的形态．图6.5.10是交替出现的枝晶和致密分叉形态，显示了周期性的枝晶和类似分形的致密分叉形态之间的转变[55]．枝晶在图中用A标记，它是一种具有明显主干、在主干两侧有规则或不规则的分叉的形态．致密分叉形态生长时尖端不稳定，枝叉尖端无规则分裂产生一种较为致密的形态，它的维数一般不具有分形的特征．致密分叉形态用B标记．从图6.5.10中可以看出，沿着特定的沉积物

枝干,A 和 B 是交替出现的.由于外部实验条件在这个转变过程中没有发生改变,这个现象可以用来研究生长形态的选择问题.

图 6.5.11 显示了枝晶向致密分叉形态的转变过程.实验结果表明,对于不同的形态,尽管其界面法向生长速率不一,其质量沉积速率是不变的.这个实验暗示,E.B.Jacob 等人提出的"线性生长速率最大"的选择假设[56]可以修正为"质量沉积(生长)速率最大"的选择假设[55].同时,利用质量沉积速率作为选择判据,有可能与 A.Hill 提出的熵产生速率的选择假设联系起来[57].

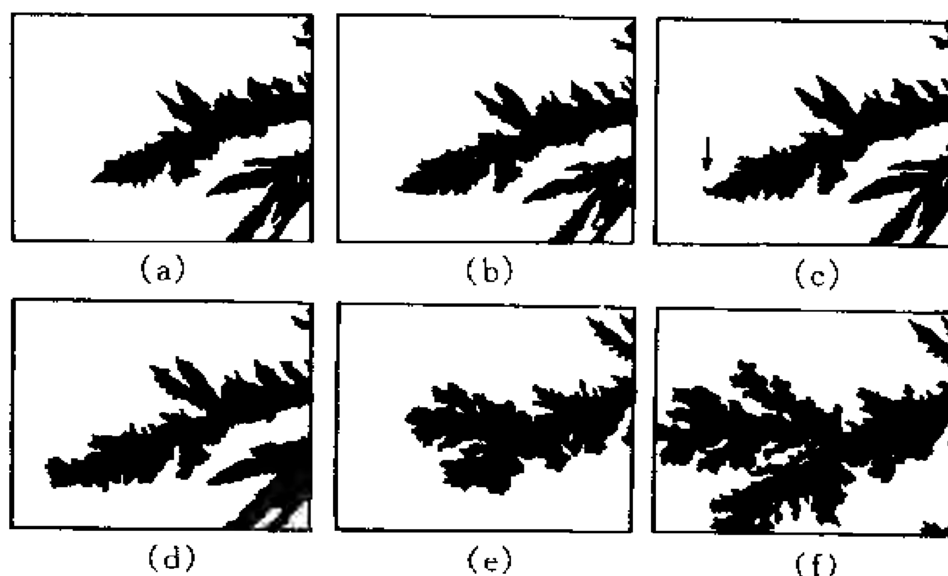


图 6.5.11 枝晶向致密分叉形态的转变过程

电化学沉积系统中另一个形态转变的例子是被人们称为"Hecker 转变"的现象.在 $CuSO_4$ 和 $ZnSO_4$ 的电化学沉积实验中,人们发现对应于电解槽某一几何位置上,沉积物的形态会从致密分叉形态转变成枝晶或另一密度的致密分叉形态;在靠近阳极处还会出现第二次形态转变[58].这种转变同时发生于沉积物的所有枝叉上,其包络的形状是与阳极的几何形状相似的.J.R.Melrose,D.B.Hibbert 和 R.C.Ball 等人对 Hecker 转变的机制进行了探讨[59],发现这一现象与电化学沉积溶液中的杂质有关.此外,生长界面附近的物理环境对生长形态同样具有非常重要的影响.最近,人们发现阴极沉积物的形态是否是分形,以及是致密分叉形态还是其他形态,取决于生长界面处的局部物理

环境，特别是电致对流的影响. V. Fleury 等人发现电致对流使沉积物形态从分形转变成致密分叉形态[60]. 王牧等人则发现电致对流会导致沉积物生长成网状形态，一旦电致对流减弱，生长形态又恢复为致密分叉形态[61]. 为了检验生长系统中的对流噪音在图样形成 (pattern formation) 中的作用, D. B. Hibbert 和 J. R. Melrose[62] 曾利用普通滤纸为基质，以浸透 $CuSO_4$ 溶液的滤纸上进行电化学沉积. 但是滤纸对抑制微观尺度上的对流并不理想. 人们曾以凝胶为基质进行了 $CuSO_4$ 溶液的电化学沉积. 实验表明，随着对流噪音的抑制，生长形态从致密分叉转变为枝晶[63].

分形生长现象的研究发展到今天，人们经历了描述分形生长现象，分析形态的结构特征，包括其广义维数 D_q, $f(\alpha)-\alpha$ 谱，利用小波变换研究形态的重分形性质，利用实时原位观察研究形态的生长机制等过程. 现在分形生长的研究仍有不少问题没有解决. 这个领域研究要取得大的进展取决于分形的坚实理论基础的建立. 同时，这样一个理论的建立又依赖于广泛和丰富的实验现象的观察和积累. 目前，尽管人们观察到很多重要的实验现象，并试图寻找其间的物理规律，但是分形物理学，从很多方面来看，仍是一门诞生中的科学.

参考文献

[1]T. R. Thomas, Rough Surfaces, Longman, London, 1982

[2]B. B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Francisco, 1982

[3]B. B. Mandelbrot, Self - Affine Fractal, Physica Scripta, 1985(32): 257　260

[4]F. Family and T. Vicsek, Dynamics of Fractal Surfaces, World Scientific, Singapore, 1991

[5]C. Godreche, Solids Far From Eguilibrium, Camb. Univ. Press, 1991

[6]R. F. Voss, In Fundamental Algorithms for Computer Graphics, Springer - Berlin, 1985: 805—835

[7]R. F. Voss, In Scaling Phenomena in Disordered Systems, Plenum Press, New York, 1985: 1—11

[8]R. F. Voss, In the Science of Fractal Images, Springer - Verlag, 1988: 21—70

[9]S. Alexander, In Transport and Relaxatrion in Random Materials, World Scientific, Singapore, 1986: 59 - 71

[10]T. Vicsek, Fractal Growth Phenomena, World Scientific, Singapore, 1989

[11]M. J. Vold, A Numerical Approach to the Problem of Sediment Volume, J. Coll. Sci., 1959 (14): 168—174

[12]M.J. Vold,Sediment Volume and Structure in Dispersions of Anisotropic Particles,J. Phys. Chem.,1959(63):1608—1612

[13]M. Eden,A Two-Dimensional Growth Process,Univ. of California Press,Berkeley,1961,IV(3):223—239

[14]S.F. Edwards, D.R. Wilkinson, The Surface Statistics of a Granular Aggregate, Proc. R. Soc.,London,1982,A(381):17 31

[15]M. Kardar, G. Parisi and Y.C. Zhang, Dynamic Scaling of Growing Interfaces, Phys. Rev. Lett.,1986(56):889—892

[16]F. Family and D.P. Landau, Kinetics of Aggregation and Gelation, North Holland, Amsterdam,1984

[17]P. Meakin,Ballistic Deposition onto Inclined Surface,Phys. Rev.,1988,A(38):994—1004

[18]F. Family and T. Vicsek, Scaling of the Active Zone in the Eden Process on Percolation Networks and the Ballistic Deposition Model,J. Phys,1985,A(18):75 81

[19]R. Jullien and P. Meakin, Concentration Effects in the Off Lattice Random Ballistic Deposition Model,J. Phys.,1989,A(22):1115—1119

[20]F. Family,Scaling of Rough Surfaces:Efflects of Surface Diffusion,J. Phys.,1986,A(19):441—446

[21]R. Jullien,P. Meakin,Simple Three-Dimensional Models for Ballistic Deposition with Restructuring,Europhys,Lett.,1987(4):1385—1390

[22]P. Meakin, P. Ramanlal, L. M. Sander, R. C. Ball, Ballistic Deposition on Surfaces, Phys. Rev.,1986,A(34):5091—5103

[23]J. M. Kim, J. M. Kosterlitz, Growth in a Restricted Solid-on-Solid Model, Phys. Rev. Lett.,1989(62):2289—2292

[24]S.D. Sarma, P Tamborenca, Scaling of the Surface Growth, Phys. Rev. Lett.,1991(66):325—328

[25]D.E. Wolf, J. Villain, Growth with Surface Diffusion, Europhys. Lett.,1990(13):389—394

[26]F. Family, Dynamic Scaling and Phase Transitions in Interface Growth, Physica, 1990, A(168):561—580

[27]P. Meakin, R. Jullien, Restructuring Effects in the Rain Model for Random Deposition, J. Phys.,1987(48):1651

[28]J. Krug, H Spohn, University Classes for Deterministic Surface Growth, Phys. Rev.,1988,A(38):4271

[29]J. Krug,Scaling Relation for a Growth Interfaces,Phys Rev.,1987,A(36):5465

[30] E. Medina, T. Hwa, M. Kardar, Y. C. Zhang, Burgers Equation with Correlated Noise, Phys. Rev., 1989, A(39): 3053

[31] R. G. Amar, F. Family, Scaling of Surface Fluctuation and Dynamics of Surface Growth Models with Power Law Noise, Phys. Rev., 1992, A(45): 5378—5393

[32] Y. C. Zhang, Growth Anomaly and Its Implications, Physica, 1990, A(170): 1

[33] C. Godreche, Solids Far from Eguilibrium, Camb. Univ. Press, 1991: 452

[34] J. Amar, F. Family, Phase Transition in a Restricted Solid - on - Solid Surface Growth Model in 2+1 Dimensions, Phys. Rev. lett., 1990(62): 543—546

[35] W. Wang, H. A. Cerdeira, Kinetic Growth of Randomlike and Ballisticlike Deposition Models, Phys. Rev., 1993, E(47): 3357—3361

[36] T. A. Witten and L. M. Sander, Diffusion Limited Aggregation, A Kinetic Critical Phenomenon, Phys. Rev. Lett., 1981(47): 1400

[37] T. A. Witten and L. M. Sander, Diffusion Limited Aggregation, Phys. Rev., 1983, B(27): 5686

[38] J. R. Banavar, M. Kohmoto and J. Roberts, Aggregate Models of Pattern Formation, Phys. Rev., 1986, A(33): 2056

[39] T. Vicsek, Pattern Formation in Diffusion - Limited Aggregation, Phys. Rev. Lett., 1984 (53): 2281

[40] R. F. Xiao, J. I. D. Alexander and F Rosenberger, Morphological Evolution of Growth Crystals: A Monte Carlo Simulation, Phys. Rev., 1988, A(38): 2447

[41] R. F. Xiao, J. I. D. Alexander and F. Rosenberger, Morphological Evolution of Crystals Growing in the Presence of a Uniform Drift: A Monte Carlo Simulation, Phys. Rev., 1989, A(39): 6397

[42] P. Meakin, Formation of Fractal Clusters and Networks by Irreversible Diffusion Limited Aggregation, Phys. Rev. Lett., 1983(51): 1119

[43] L. Niemeyer, L. Pietronero, H. J. Wiesmann, Fractal Dimension of Dielectric Breakdown, Phys. Rev. Lett., 1984(52): 1033

[44] Nai Ben Ming, Mu Wang and Ru Wen Peng, Nucleation - Limited Aggregation in Fractal Growth, Phys. Rev., 1993, E(48): 621

[45] 闵乃本，晶体生长的物理基础，上海科学技术出版社，1982

[46] H. Honjo, S. Ohta and M. Matsushita, Irregular Fractal - Like Crystal Growth of Ammonium Chloride, J. Phys. Soc. Jpn., 1986(55): 2487

[47] S. Ohta and H. Honjo, Growth Probability Distribution in Irregular Fractal - Like Crystal Groath of Ammonium Cbloride, Phys. Rev. Lett., 1998(60): 611

[48] Mu Wang et. al., Fractal Aggregations at Low Driving Force with Strong Anisotropy, Phys. Rev. Lett., 1998(80):3089

[49] F. Argoul, A. Arneodo, J. Elezgaray and G. Grasseau, Wavelet Analysis of the Self - Similarity of Diffusion Limited Aggregotes and Electrodeposition Clusters, Phys. Rev., 1990, A (41):5537

[50] Zhenyu Zhang and Max G. Lagelly, Atomistic Processes in the Early Stages of Thin Film Growth, Science Press, 1997:276, 377

[51] C. Ratsch, A. Zangwill, P. Smilauer and D. D. Vedensky, Saturation and Scaling of Epitaxial Island Dendrites, Phys. Rev. Lett., 1994(72):3194

[52] W. T. Elam et. al., Frctal Aggregates in Sputter Deposited $NbGe_2$ Films, Phys. Rev. Lett., 1985(54):701

[53] P. Vekilov, J. Iwan, D. Alexander and F. Rosenberger, Nonlinear Response of Layer Growth Dynamics in the Mixed Kinetics - Bulk Transport Regime, Phys. Rev., 1996, E(54):6650

[54] Mu Wang, Xiao Yong Liu, Cheng Sun, Nai Ben Ming, P. Bennema and W. J. P. Van Enckevorr, Periodic Roughening Transitions in Diffusion - Limited Growth, Europhys. Lett., 1998(41):61

[55] Mu Wang and Nai Ben Ming, Alternation Morphology Transitions in Electrochemical Deposition, Phys. Rev Lett., 1993(71):113

[56] E. B. Jacob and P. Garik, The Formation of Patterns in Non - Equilibrium Growth, Nature, 1990(343):523

[57] A. Hill, Entropy Production as the Selection Rule Between Different Growth Morphology, Nature, 1990(348):426

[58] P. Garik et al., Laplace and Diffusion - Field - Controlled Growth in Electrochemical Deposition, Phys. Rev. Lett., 1989(62):2703

[59] J. R. Melrose, D. B. Hibbert and R. C. Ball, Interfacial Velocity in Electrochemical Deposition and Hecker Transition, Phys. Rev. Lett., 1990(65):3009

[60] V. Fleury, J. H. Kaufman and D. B. Hibbert, Mechanism of a Morphology Transition in Ramified Electrochemical Growth, Nature, 1994(367):435

[61] Mu Wang, W. J. P. van Enckevort, Nai Ben Ming and P. Bennema, , Formation of Mesh - Like Electrodeposit Induced by Electrodeposition, Nature, 1994(367):438

[62] D. B. Hibbert and J. R. Melrose, Copper Electrodeposits in Paper Support, Phys. Rev., 1988, A(38):1036

[63] Mu Wang, Nai Ben Ming and Piet Bennema, Pattern Formation in Noise - Reduced Electrochemical Deposition, Phys. Rev., 1993, E(48):3825

第七章 图像分形基编码与压缩技术

图像处理就是对图像信息进行加工处理，以满足人们的视觉心理或实际应用要求．调查研究证实，人类获取外界信息的绝大部分（约 70%）来自视觉系统所接受的图像信息，因此，图像信息加工处理技术的广泛应用成为一种必然的趋势．

为了表现数字化图像，需要大量数据，这对图像信息的存贮、加工和传输都造成严重的困难．为了有效地工作，必须进行数据压缩．编码是压缩技术中最重要的方法，它是图像处理技术中发展最早且比较成熟的技术．例如 DCT 和 DPCM 等编码方法都被已提出的国际标准 JPEG 和 MPEG 所采纳和使用．

近年来，图像分形编码技术在图像压缩上取得了很大进展，引起人们的广泛的关注和兴趣．Barnsley 基于叠代函数系（IFS）理论提出的图像压缩技术，声称对任何图像都可达到非常高的压缩比，现已获得美国专利．这里讨论的是另一种基于分形的图像编码压缩方法，称为图像分形基编码压缩，它是一种算法简单、实现容易且是有效的编码方法，使用这个方法建立的软件系统已经投入实际应用．

7.1 数字图像表示

由于计算机具有大容量的存贮器和高速处理器，以及强

有力的软件支持，保证了信息处理的高速度且能达到希望的精度．同时，通过改变软件可以变换处理方法，操作灵活而方便．因此，图像的数字处理方法随着计算机技术的发展而获得飞跃进步．

对于一张黑白照片，可以用2元函数 $f(x,y)$ 来表示，x,y 坐标标记了图像中点的位置，$f(x,y)$ 则表示在点 (x,y) 的灰度值．我们称这样的矩阵元素为像元或像素．

对于彩色图像，每个像元是用3个基彩色分量：红(R)、绿(G)、蓝(B)三色来表示．为了更有效地编码，彩色图像也能用亮度(Y)和色度(U 和 V)来表示．按照PAL标准，从 R,G,B 到 Y,U,V 的转换式是：

$$Y = 0.299R + 0.587G + 0.114B,$$
$$U = -0.147R - 0.289G + 0.437B,$$
$$V = 0.615R - 0.515G - 0.100B.$$

这样，一个数字彩色图像，可视为对应到3个分量的3个矩阵，而数字化的电视图像则是这种图像的序列．

图像包含大量数据，例如CCIR对数字电视图像推荐的601标准是指定720线，每线中的像元数依赖于所使用的电视模式，对于PAL则是576像元．为了表现每个像元灰度值的差异，还要第三维——像元色彩的浓度，它由表示每个像元灰度级的bit数来反映，对于彩色分量，要8bit．以PAL为例，一幅图像含有 $720\times576\times24$bit，比1.2Mbit还要多，这是一张高密软盘的存贮量．而在实时电视图像中，每秒有25帧这样的图像．对于卫星遥感图像，其数据量更加惊人．以TM图像为例，通常是同一时刻由对应不同波段的传感器接受地面信息而得不同图像，常用的通道有6个．一幅图像含有 $5700\times6920\times8\times6$bit，接近240Mbit，实在是太庞大了．

然而，表现图像的数据又存在较强的相关性．因为从统计观点出发，某像元的灰度值总是和周围其他的像元灰度值有某种关系，这称为空间相关或空间冗余．应用某种编码方法提取并减少这些相关性，便可实现图像信息的数据压缩．在运动图像中，帧之间的相关性更强，这称为时间相关或时间冗余．对于静止图像压缩，其目的是尽可能移去空间冗余，而对于运动的电视图像，则是将空间冗余和时间冗余都尽可能移去，以达到高的压缩比．另一方面，在许多情况下，重构图像的终端接受者是人的眼睛，而人的视觉系统接受信息能力是有限的，如灰度分辨率和空间分辨率都不是太高．即使是记录或显示设备，也

往往受本身限制，只能接受某种程度量的信息而不能全部接受．所有这些，都可在图像压缩中加以充分利用．

7.2　图像分形基编码

7.2.1　图像分形基编码思想

分形概念是 B.B.Mandelbrot 首先提出的．可以说，由海岸线长度测量中反映出的现象是引出分形概念的一个起因．

为了测量某海岸线的长度，通常做法是从某个起点开始，用确定长度 δ 的量尺沿着海岸线的凹凸起伏一步步地量算．也可用确定面积的圆（或正方形）去覆盖它．整个过程所需的步数或盒子数记为 $N(\delta)$．如某段海岸线有完全确定的长度 L，则我们期望 $N(\delta)$ 与 δ 成反比．这样，随着 δ 取得越来越小，$L(\delta) = N(\delta) \times \delta$ 将接近常数 L．然而，实际试验结果并不如此．通过取不同的 δ 作出双对数图（$\log\delta, \log L(\delta)$），发现长度度量有下述很好的近似公式：

$$L(\delta) = a\delta^{1-D}, \tag{7.2.1}$$

或

$$N(\delta) \Leftrightarrow \frac{1}{\delta^{D}}, \tag{7.2.2}$$

其中 a 是常数．对于通常光滑曲线，期望值 $D = 1$；对于海岸线，一般都有 $D > 1$，如挪威海岸线 $D = 1.52$．就是说，对于像海岸线这样的曲线，度量长度 $L(\delta)$ 与量尺长度 δ 之间有着如(7.2.1)式所示的幂律关系．海岸线是一个分形，D 就是分形的维数．图像分形基编码方法的思想就是起源于海岸线长度测量方法．

7.2.2　图像分形基编码方法[1]

在数字图像处理系统中，为了有效地获取和处理数据，常需要将 2 维数据转换成 1 维的．对于各种不同的应用，可采取许多种不同方法，如光栅扫描（图7.2.1）、皮亚诺扫描（图7.2.2）、角扫描、间隔扫描、同轴螺旋扫描和平行线扫描等．

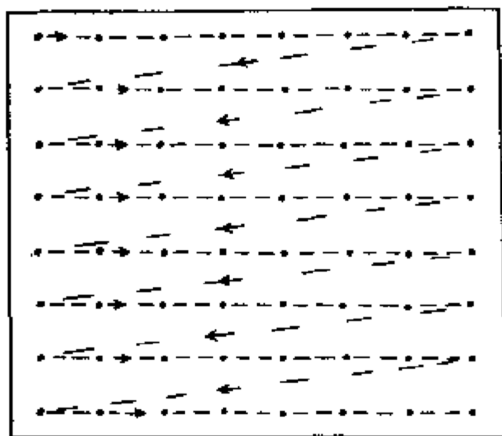


图7.2.1　光栅扫描

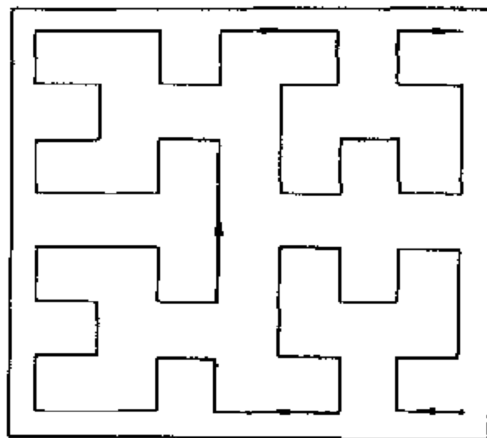


图7.2.2　皮亚诺扫描

1. 光栅扫描法

现在按照光栅扫描法将2维数字图像数据重新排列成序列 $z_i, i = 1,2,3,\cdots$，它表示按重排后的第 i 个像元的灰度值，将其用图形表示，容易发现，由像元灰度值形成的波形曲线具有类似海岸线形状的特征.

接着，用测量海岸线长度的方法来构造图像色彩明暗度波形曲线的编码. 从某个边缘样本点开始，由于样本点是离散的，在构造时每次让长度为 y 的量尺两端都落在某样本上，而不是停留在当中，如图7.2.3所示. 这样，

$$0 < t_i \leqslant y, \qquad t_i \in \mathbf{Z}, \tag{7.2.3}$$

$$g_{i+1} - g_i + \text{sign}\sqrt{y^2 - t_i^2}, \tag{7.2.4}$$

其中，

$$\text{sign} = \begin{cases} 1, & g_{i+1} \geqslant g_i, \\ -1, & g_{i+1} < g_i, \end{cases}$$

这里 g_i 是 x_i 样本点的灰度值，t_i 是第 i 次测量时量尺的投影距离. 那末，(t_i, sign) 可作为图像的一种编码，我们称为分形基编码. 这是一个有失真的编码法. 由这组编码值以及起始点的灰度值，利用常用的逼近方法，可以重构出原波形曲线的近似曲线，图7.2.4为由1阶插值重构的波形曲线.

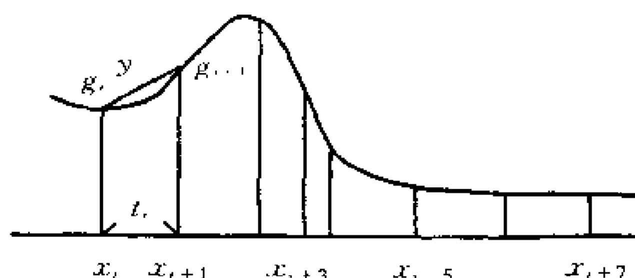


图7.2.3　图像色彩明暗强度波形曲线

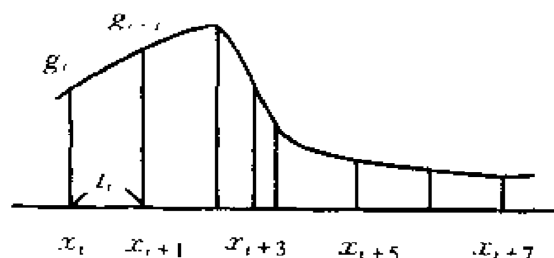


图7.2.4　由 1 阶插值重构的波形曲线

2.　*分形基编码法的特点*

(1) 只要量尺长 $y > 1$,就可以达到信息压缩目的.我们称 y 为压缩比的可控因子.当 y 越大时,压缩比也越大,当然,重构图像的质量可能差些.

(2) 由于 sign 是符号函数,可用 1bit 来表示.这样,对于压缩后的信息存贮,所需 bit 数是 $ay^{-D}[1+\log_2(1+y)]$.可以看出,压缩比大小与图像的分形维数 D 有关,一般来说,D 越大,压缩比越小.

(3) 从图像波形曲线可以看出,对于同样大小的量尺长 y,在平坦区段,如图7.2.3 中的 $x_{i+5} \sim x_{i+7}$,跨越的 t_i 大,压缩比就高,重构后的图像质量也好;而在陡突边界,如 x_{i+3} 与 x_{i+4} 之间,跨越的 t_i 小,不但压缩比小,而且重构图像质量也差.

(4) 在解码过程中,需从 x_i 样本点的灰度值 g_i 利用(7 2.4)式来计算 x_{i+1} 样本点的灰度值 g_{i+1},这是一个含有乘法和开方运算的表达式.在使用计算机进行计算时,不仅需要花费一定的机时,而且还要将运算结果的实数值舍入成整数值,实现的代价是较高的.

7.2.3　图像分形压缩的理论基础

图像分形基编码方法是基于如下假设:一幅图像的色彩明暗度波形曲线是分形曲线.A.P.Pentland[2] 在一个 3 维曲面具有空间各向同性分数布朗形状的假定下证明了这个结果.

定理7.2.1　对于一个分形曲面,其图像色彩明暗度波形曲面也是分形,

反之亦然.

后来 M.C.Stein[3] 又指出,可以在更弱的条件下,证明结论也是对的.

7.3 图像分形基编码实用技术

按照以上所述的编码解码方法,对图像数据进行压缩处理,一般说压缩比不高,重构图像质量也差.现提出下面的改进技术.

7.3.1 编码值的快速确定

1. *构造启动函数*

$$TF(x) = \sqrt{y^2 - x^2}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant y. \tag{7.3.1}$$

用当前样本点的灰度值 g_i 和随后相继$[y+1]$个像元的灰度值 $z_i, z_{i+1}, \cdots, z_{[i+y]}$ 分别与 $TF(x)$ 进行比较,满足

$$|g_i - z_{i+x}| > TF(x) \tag{7.3.2}$$

的第一个整数 x 就是编码中的 t_i,相应的符号函数 sign 也可以立即求得.

由于(7.3.1)式的计算结果是实数,而 $|g_i - z_{i+x}|$ 只取整数值,为了降低计算复杂性,我们构造一个表,来代替函数 $TF(x)$ 的计算,称为 TF 表(或称 TF 数列).例如当 $y = 15$ 时,可取 TF 表为:

$$TF(x) = 15,15,14,13,13,11,9,8,7,5,4,4,4,4,4,4. \tag{7.3.3}$$

在实际应用中,需根据具体图像特征以及对重构图像质量的要求来构造 TF 表.

2. *自适应方法*

在曲线的陡峭区段,为了减少重构图像的误差,可选用小的量尺长 y 以及相应的 TF 表;相应地,在平坦区段,可启用大的 y 以及 TF 表,以增大压缩比.

7.3.2 皮亚诺扫描法的使用

采用光栅扫描法,从一个区域穿过边界进入另一区域,由于像元灰度值的变化,在图像色彩明暗度波形曲线上必然呈现出强烈的上下抖动,这是造成原编码法压缩比不高的主要原因.但从图像上可以发现,除位于边界上的像元以外,一个区域内某像元灰度值与其邻近像元灰度值之间差异不大.而皮亚诺扫

描法是按块进行扫描的,这个特点恰好可以被利用来提高图像编码性能.

皮亚诺曲线是 1890 年意大利数学家皮亚诺发现的.这个曲线族可以扫描 n 维空间,而由扫描所形成的 1 维序列上保持了原数据空间某些空间连接特征.简单地说,皮亚诺曲线有下述两个重要特性:

(1) 保持了空间的连接性,即在 1 维序列中相邻的像元在空间上一定也是相邻的.

(2) 原数据空间中的像元和扫描形成的曲线元素之间是 1—1 对应的.

这两个特性正是我们为改进原编码法所期待的.

研究证实,皮亚诺曲线是分形曲线,分形维数 $D = 2$.现在有许多种生成皮亚诺曲线的方法.如:

S. Dubuc(1990 年) 基于 IFS 理论用 9 个函数系生成的方法;

A. J. Fisher(1986 年) 用迭代法生成的方法;

R. J. Stevens 等(1983 年) 构造种子曲线,用递归法生成的方法;

杨昆明等(1988 年) 用递归法生成的方法.

我们考虑将皮亚诺扫描用于图像数据压缩的目的,特别是还需要重构图像,而迭代法不适合这个要求,故采用递归法.先构造 4 × 4 基块,由这个基块容易生成 8 × 8 扫描块,进而构造 16 × 16 扫描块,见图7.3.1 与图 7.3.2 .这种扫描块的大小是比较合适的选择.

按照皮亚诺扫描法形成的图像色彩明暗度波形曲线是较平坦的.这样,用分形基编码法就可获得较大的压缩比.

图7.3.1　4 × 4 基块

图 7.3.2　8 × 8 与 16 × 16 扫描块

7.4 软件简介

我们利用图像分形基编码压缩方法对遥感图像 TM 进行了实际处理. 压缩比在 10 : 1 ~ 15 : 1,统计平均相对误差在 2% ~ 3%,重构图像有很好的视觉效果,保持原始图像的地理特征,满足各种分类要求. 将这个方法应用于 NOAA 图像以及红外云图和雷达回波等,都达到同样效果.

对于这项技术,目前我们是用软件实现,可在微机或工作站上运行. 系统结构图如图 7.4.1 所示.

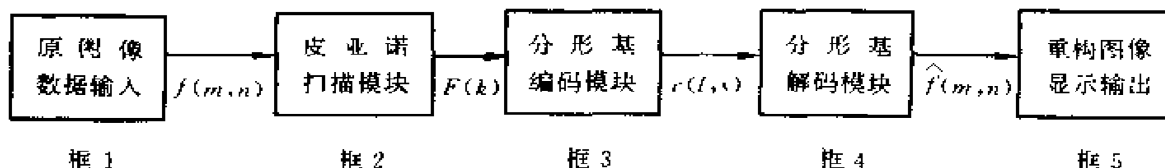


图7.4.1 系统结构图

对图7.4.1 的系统结构图作如下说明:

框 1:接受来自信息中心的磁带或磁盘图像(原图像) 数据.

框 2:将输入的 2 维图像数据按7.3 节中介绍的 16 × 16 扫描块方法,变换成 1 维的图像信息,即皮亚诺曲线.

框 3:将图像色彩明暗度波形曲线按7.2 节中提供的方法,结合7.3 节中介绍的技巧,快速生成分形基编码.

框 4:将上面两个框的处理步骤按逆向次序进行,选择适当的插值法构造出 2 维图像信息,所得结果是输入图像数据的一个近似.

框 5:使用图像软件,将重构图像在计算机上显示,或利用专用设备将重构图像打印输出.

这项工作是国家"八五"攻关课题中的子课题,1994 年已被验收并投入遥感图像处理的实际应用. 该课题荣获 1996 年中国科学院科技进步一等奖和 1997 年国家科技进步二等奖。

基于这个软件,我们已推出图像分形基编码压缩软件包. 系统分成 3 级,第一级是基于原图像的信息熵,应用数学变换组成无失真编码法,对遥感图像编码率达到 45% ~ 55%;第二级是高保真,编码率达到 55% ~ 65%;第三级

是分形基编码,编码率在 90% ~ 95% .此软件包对于遥感、气象等广泛领域都是适用的.图像分形基编码压缩技术在生物、医学、通信工程、军事、公安业务以及计算机科学中都有广泛的应用前景.

7.5 分形的计算机生成

7.5.1 分形的计算机生成动态图形演示

分形研究离不开计算机.无论是有关分形的计算,还是分形原图像显示,都要借助计算机的帮助.从另一个角度说,分形的进展又极大地丰富了计算机图形学的内容,在计算机上作自然景物的仿真模拟便是重要例证之一.

分形的生成,须结合图例进行.我们已生成了如下软件并在计算机屏幕上演示它们的图形.

(1) Mandelbrot 集合与 Julia 集合的无限嵌套的精细结构.

(2) 实 2 次迭代(May 模型)产生的周期倍增现象以及从混沌到有序的演变景象.

(3) 计算机动画与计算机辅助教学系统.

(4) 反映第十一届亚运会的《体育大舞台》电影的片头;中央电视台每日播放的《新闻联播》电视节目片头等.

(5) 为申办 2000 年奥运会而制作的北京未来交通、设施、场馆 3 维动画(与香港先涛公司等单位合作).

(6) 计算机辅助制作教学动态演示电视片《立体构成原理》等.

1993 年 11 月在美国 Minneapolis 召开了第四届国际电子艺术学术会议(Fourth International Symposium on Electronic Art),参加会议的人员来自世界各地,其中有艺术家、数学家、计算机科学家及诸多关心多媒体技术进展及应用的企业家.在分组报告中,非线性迭代导致混沌而由此引发的音乐和谐动听,它反映在 Martin Herman 的文章 Deterministic Chaos, Iterative Models, Dynamical Systems and Their Applications 之中;H. Fergusos 的富有数学内涵的艺术作品,K. G. Suffern 的 Chaosand Computer Art,以及专题介绍 Computer Aided Music, Sensors and Fractals 等等,与分形几何和分形物理关系密切.这些资料汇集了计算机图形特别是动画作品,反映了近年最新动态和水平[4].

7.5.2 分形生成的典型方法:L 系统与 IFS 方法

1. L 系统

A. Lindenmayer 于 1968 年提出研究植物形态与生成的描述方法,后来发展成一套形式语言,称为 L 系统.最简单的类型称为 DOL 系统:

令 V 表示字母表,V^* 表示 V 上所有单词的集合.设有 3 元组 $G = < V, W, P >$,ω 为一个非空单词,P 为产生式的有限集合,产生式写为 $a \to x$,a 与 x 分别称为产生式的前驱和后继.规定对任何字母 $a \in V$,至少存在一个非空单词 x,使得 $a \to x$.若对给定的前驱 $a \in V$ 无明确解释的产生式,则规定 $a \to a$ 这一特殊产生式属于P.对每个 $a \in V$,当且仅当有一个非空单词 x,使 $a \to x$,那么说这个系统是确定的,记为 DOL 系统.以上的字符解释为:

F:向前移一步,步长为 d,并画一直线段;

+:左转 δ 角(正向角为逆时针方向);

_:右转 δ 角(负向角为顺时针方向);

[:将当前状态压入堆栈;

]:从堆栈中弹出一个状态作为当前状态.

如果建立空间的 L 系统,转角情形不这么简单,必须引入其他字符,如 δ,$\wedge$,\,/,|,{,G,· 等,各有一定的解释.

L 系统自然推广到含参数的情形,称为参数化 L 系统.如果对多个产生式引入相应的概率,则有随机 L 系统等等.

2. IFS 方法

关于 IFS 方法:一个 2 维的 IFS 由两个部分组成,即仿射变换的集合:

$$\{w_1, w_2, \cdots, w_N\},$$

及概率集合:

$$\{p_1, p_2, \cdots, p_N\}.$$

变换 W_j 是压缩的,其 Lip 常数为 s_j.如果满足条件:

$$s_1^{p_1} \cdot s_2^{p_2} \cdot \cdots \cdot s_N^{p_N} < 1,$$

则说这是一个 IFS 码.

分形变换理论,主要是局部 IFS 理论.分形生成的照相机算法是完成迭代过程:

$$A_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{N} W_j(A_n), \qquad n = 1,2,\cdots.$$

$A_0 \subset R^2$ 为平面上给定的图像，通常认为它是紧集．如果 $\{W_j\}$ 是压缩的，则 $\{A_n\}$ 按 Hausdorff 度量收敛到吸引子．

在计算机上用 L 系统及 IFS 方法生成的图形可用幻灯片演示．

7.5.3　数与形的表示

重新考虑我们采用的记数法和坐标系，可能会有新的看法．当我们引入一种特别的数基，会观察到复平面上的分形结构．

若用 0 和有限个自然数作为数字符号，在复数基 b 之下，所有高斯整数都能得到表示，则称 b 为恰当基．如 $b = -1 + i$ 就是恰当基．然而 $b = 1 - i$ 却不是恰当基．问题是在 $b = 1 - i$ 之下，复数被表示和不能被表示的，在复平面上是如何分布的？

分析与绘图表明，可表示与不可表示的数在复平面上各自形成区域，其边界为分形．

此外，还应考虑下面这些基本问题：坐标问题，低维到高维乃至无穷维的绘图问题，以及计算几何学的造型技术与分形几何学的造型技术相结合的问题等等．

参考文献

[1] E. Walach, E. Karnin, A Fractal Based Approach to Image Compression, ICASSP, Tokto, , 1986: 529—532

[2] A. P. Pentland, Fractal-Based Description of Natural Scenes, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machime Intelligence, PAMI, 1984, 6(6): 661—674

[3] M. C. Stein, Fractal Image Models and Object Detection, In Visual Communications and Image Processing Ⅱ, PROC. SPIE., 1987(84): 293—300

[4] 齐东旭，分形及其计算机生成，科学出版社，1994